מודלים חישוביים 31.3.2025

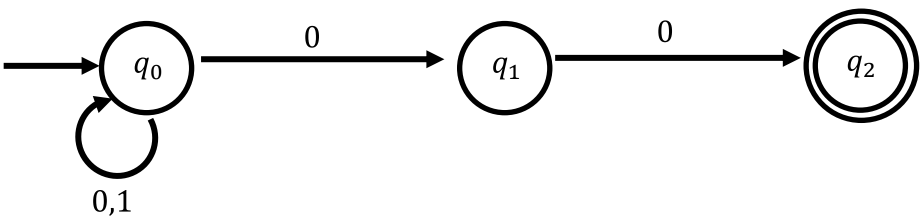
הרצאה 3: אוטומטים סופיים לא דטרמיניסטיים

מרצה: אורי שטמר

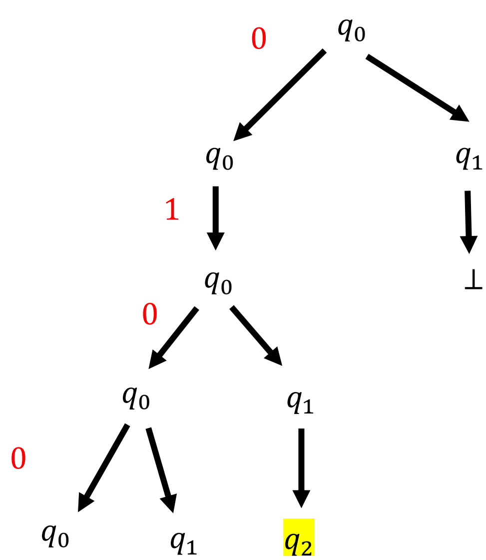
Based on previous iterations of this course, given by Nir Bitansky, Rotem Oshman, Iftach Haitner, and Omer Paneth.

בהרצאה הקודמת דיברנו על אס"דים שהם תוכניות עם מס' מצבים הקוראות את הקלט בסטרימינג. דיברנו על שפות רגולריות שהן שפות המתקבלות ע"י אוטומטים. הגדרנו כמה פעולות על שפות (איחוד, שרשור וכו') וטענו שהן משמרות רגולריות. הוכחנו לאיחוד וראינו שעבור שרשור קשה יותר להוכיח. זה הוביל אותנו לדבר על אסל"ד.

<u>תזכורת:</u> דוגמה לאסל"ד



ריצה על קלט 0100:



<u>תזכורת:</u> אוטומט סופי לא-דטרמיניסטי מינוס (אסל"ד-) הוא חמישייה $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ כאשר:

- Q קבוצה סופית (לא ריקה) של מצבים
- Σ אלפאבית
- $\delta: Q \times \Sigma \to 2^Q$
- $S \subseteq Q$ קבוצת מצבים תחיליים
- $F \subseteq Q$ קבוצת מצבים מקבלים

(הערה: "מינוס" כי עוד לא טיפלנו במעברים ספונטניים)

כשדיברנו על אס"דים, הגדרנו פונק' מעברים מורחבת שאמרה לנו: "לאן אגיע אם אני נמצא במצב q וקורא מילה x". אבל כשאנחנו מדברים על אסל"דים אז לפונק' המעברים המורחבת יהיה תפקיד טיפה אחר: במקום לומר לנו לאן נגיע היא תגיד לנו לאן אנחנו יכולים להגיע

הגדרה: יהי $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסל"ד-. פונקציית המעברים המורחבת $\hat{\delta}: 2^Q \times \Sigma^* \to 2^Q$ מוגדרת בצורה רקורסיבית:

- עבור המילה הריקה ε, לכל $T \subseteq Q$ מתקיים $\hat{\delta}(T, \varepsilon) = T$
- לכל $n \geq 0$, $x \in \Sigma^n$, $\sigma \in \Sigma$, $T \subseteq Q$ מתקיים

$$\hat{\delta}(T, x\sigma) = \bigcup_{q \in \hat{\delta}(T,x)} \delta(q, \sigma)$$

אפשר לחשוב על זה כך: קודם נקרא את x ונראה מהי קבוצת כל המצבים שאפשר להגיע אליהם מהמצבים ב- T כאשר אנחנו קוראים רק את x. זה $\hat{\delta}(T, x)$. עכשיו נעשה עוד צעד אחד: מתוך כל מצב בקבוצה הזאת, נעשה עוד צעד אחד עם σ ונראה לאן נוכל להגיע.

עכשיו נוכל לומר מתי אסל"ד מקבל מילה:

הגדרה: אסל"ד- $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ מקבל מילה $x \in \Sigma^*$ אם"ם $\hat{\delta}(S, x) \cap F \neq \emptyset$.

באופן שקול: N מקבל $x \in \Sigma^n$ אם"ם קיימים $q_0, q_1, \dots, q_n \in Q$ כך ש-

- $q_0 \in S$
- לכל $i \in [n]$ מתקיים $q_i \in \delta(q_{i-1}, x_i)$
- $q_n \in F$

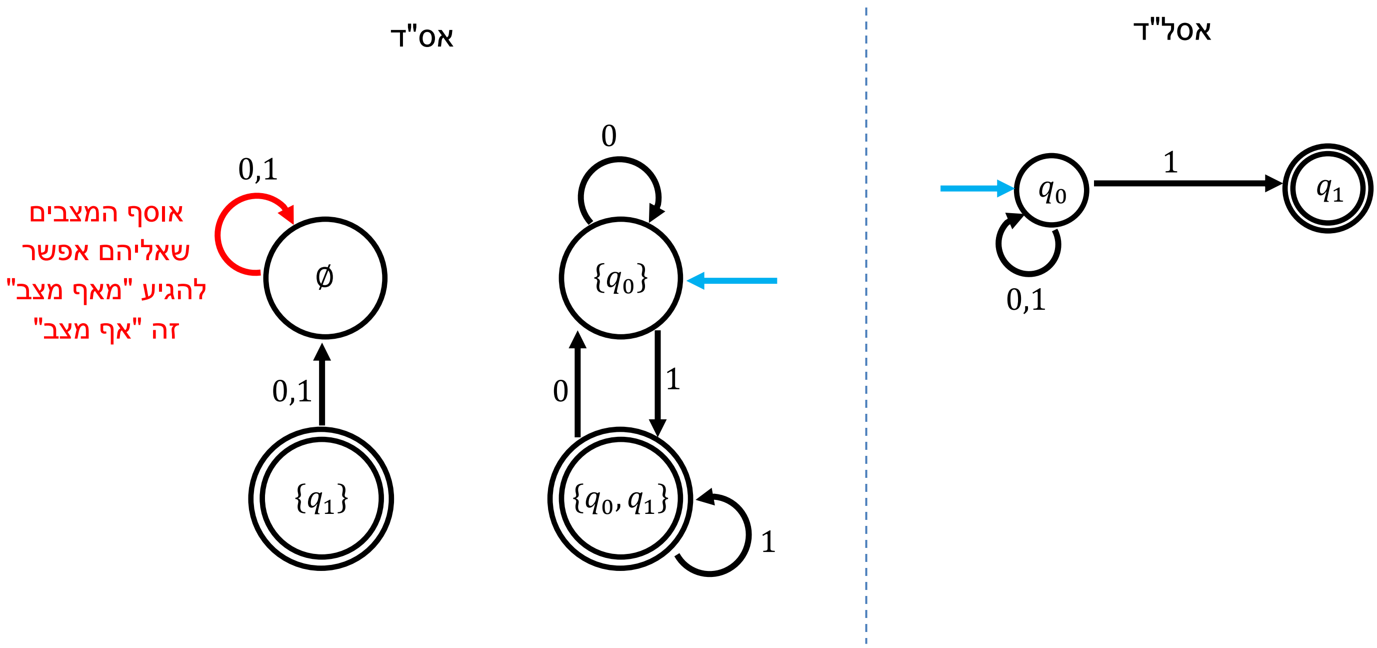
ובאופן טבעי,

הגדרה: השפה של N היא אוסף המילים ש- N מקבל. מסומנת כ- $L(N)$.

עכשיו נוכל להוכיח את המשפט שציינו בהרצאה הקודמת שאומר שאס"דים ואסל"דים הם שקולים

משפט: לכל אסל"ד- N קיים אס"ד A כך ש- $L(N) = L(A)$.

רעיון ההוכחה: באסל"ד-, בכל פעם שקוראים אות עוברים מקבוצת מצבים נוכחית לקבוצה אחרת (לפעמים ריקה). בהתאם נוכל לבנות אס"ד שמצביו הם תתי קב' של מצבי האסל"ד-.



הוכחת המשפט:

בהינתן אסל"ד- $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, S_N, F_N)$ נגדיר את אס"ד ("החזקה") הבא $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_A, F_A)$:

- מצבים $Q_A = \{\langle T \rangle : T \subseteq Q_N\}$
- מצב תחילי $q_A = \langle S_N \rangle$
- מצבים מקבלים $F_A = \{\langle T \rangle \ : \ T \subseteq Q_N,\ T \cap F_N \neq \emptyset\}$
- פונקציית מעברים: לכל $\sigma \in \Sigma,\ \ T \subseteq Q_N$

$$\delta_A(\langle T \rangle, \sigma) = \langle \bigcup_{q \in T} \delta_N(q, \sigma) \ \rangle$$

הערה: מטרת הסימון $\langle T \rangle$ להזכיר מתי אנחנו חושבים על $T \subseteq Q_N$ בתור מצב ב Q_A

טענה: לכל $T \subseteq Q_N,\ x \in \Sigma^*$ מתקיים $\hat{\delta}_A(\langle T \rangle, x) = \langle \ \hat{\delta}_N(T, x) \ \rangle$

כלומר, לאן נגיע ב A אם אנחנו נמצאים ב <T> וקוראים מילה x? בדיוק למצב שהוא רשימת כל המצבים שאליהם אפשר להגיע באסל"ד מ T כאשר קוראים את x.

למה זה מספיק כדי להוכיח את המשפט?

בפרט, לכל $x \in \Sigma^*$ מתקיים:

$$x \in L(A)$$

אם"ם

$$\hat{\delta}_A(\langle S_N \rangle, x) \in F_A$$

אם"ם (לפי הטענה)

$$\langle\ \hat{\delta}_N(S_N, x)\ \rangle \in F_A$$

אם"ם (הגדרת F_A)

$$\hat{\delta}_N(S_N, x) \cap F_N \neq \emptyset$$

אם"ם

$$x \in L(N)$$

את הטענה נוכיח באינדוקציה על אורך x.

<u>בסיס:</u> עבור $x = \varepsilon$ מתקיים

$$\hat{\delta}_A(\langle T \rangle, \varepsilon) = \langle T \rangle = \langle \hat{\delta}_N(T, \varepsilon) \rangle$$

<u>צעד:</u> עבור $n \geq 0$, $x \in \Sigma^n$, $\sigma \in \Sigma$ מתקיים

$$\hat{\delta}_A(\langle T \rangle, x\sigma) \underset{\text{הגדרת } \hat{\delta}_A}{=} \delta_A\big(\hat{\delta}_A(\langle T \rangle, x), \sigma\big)$$

$$\underset{\text{ה.א.}}{=} \delta_A\big(\ \langle \hat{\delta}_N(T, x) \rangle\ , \sigma\big)$$

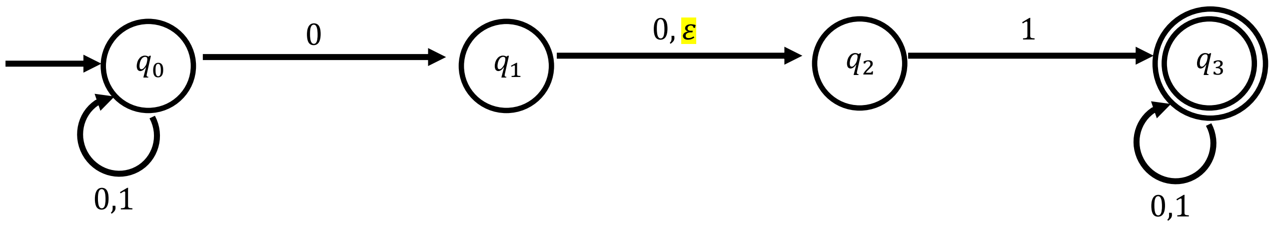
$$\underset{\text{הגדרת } \delta_A}{=} \langle \bigcup_{q \in \hat{\delta}_N(T,x)} \delta_N(q, \sigma)\ \rangle$$

$$\underset{\text{הגדרת } \hat{\delta}_N}{=} \langle\ \hat{\delta}_N(T, x\sigma)\ \rangle$$

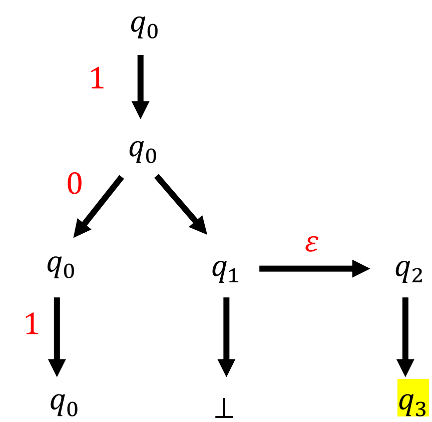
<u>שימו לב:</u> מס' המצבים של האס"ד שבנינו אקספוננציאלי במס' המצבים של האסל"ד- ממנו התחלנו.

מעברי ε

דוגמה:



ריצה על קלט 101:



<u>סימון:</u> $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

<u>הגדרה:</u> אוטומט סופי לא-דטרמיניסטי (אסל"ד) הוא חמישייה $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ כאשר:
- Q קבוצה סופית (לא ריקה) של מצבים
- Σ אלפאבית
- $\delta: Q \times \Sigma_\varepsilon \to 2^Q$
- $S \subseteq Q$ קבוצת מצבים תחיליים
- $F \subseteq Q$ קבוצת מצבים מקבלים

בדוגמה לעיל

$\boldsymbol{\delta}$	**0**	**1**	$\boldsymbol{\varepsilon}$
$\boldsymbol{q_0}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$	$\emptyset$
$\boldsymbol{q_1}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$\boldsymbol{q_2}$	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
$\boldsymbol{q_3}$	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$

כעת נרצה להרחיב את הגדרת $\hat{\delta}$ גם עבור מעברי ε. לשם כך נגדיר את המושג של סביבת-ε: אם הגעתי לאיזשהו מצב באוטומט שלי, לאיזה עוד מצבים אני יכול להגיע ממנו "בחינם"?

<u>הגדרה:</u> יהי $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסל"ד.

- עבור $q \in Q$, <u>סביבת-ε</u> של q מוגדרת להיות

$$E(q) = \left\{ q' \in Q : \begin{array}{l} \exists k \geq 0 \quad \text{and} \quad q_0, \dots, q_k \in Q \quad \text{such that} \\ \quad (1) \quad q_0 = q \\ \quad (2) \quad \forall i \in [k] \quad q_i \in \delta(q_{i-1}, \varepsilon) \\ \quad (3) \quad q_k = q' \end{array} \right\}$$

- עבור $T \subseteq Q$, <u>סביבת-ε</u> של T מוגדרת להיות

$$E(T) = \bigcup_{q \in T} E(q)$$

עכשיו אנחנו יכולים להרחיב באופן טבעי את ההגדרה של פ' המעברים המורחבת של שאסל"ד כדי לכלול מעברי אפסילון

<u>הגדרה:</u> יהי $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסל"ד. <u>פונקציית המעברים המורחבת</u> $\hat{\delta}: 2^Q \times \Sigma^* \to 2^Q$ מוגרת בצורה רקורסיבית:

- עבור המילה הריקה ε, לכל $T \subseteq Q$ מתקיים $\hat{\delta}(T, \varepsilon) = E(T)$
- לכל $n \geq 0$, $x \in \Sigma^n$, $\sigma \in \Sigma$, $T \subseteq Q$ מתקיים

$$\hat{\delta}(T, x\sigma) = E\left(\bigcup_{q \in \hat{\delta}(T, x)} \delta(q, \sigma) \right)$$

<u>הגדרה:</u> אסל"ד $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ מקבל מילה $x \in \Sigma^*$ אם"ם $\hat{\delta}(S, x) \cap F \neq \emptyset$.

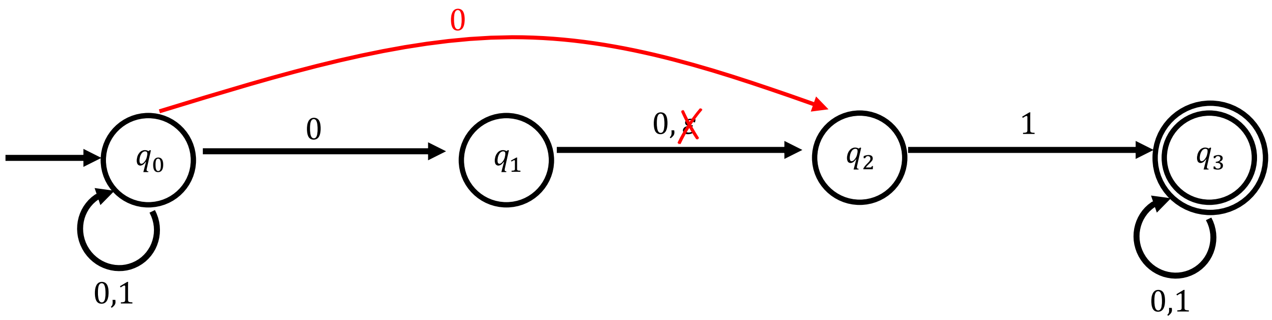
באופן שקול: N מקבל $x \in \Sigma^*$ אם"ם קיים $k \geq 0$ וקיים $\tilde{x} \in \Sigma_\varepsilon^k$ כך ש- x מתקבל מ- $\tilde{x}$ ע"י מחיקת כל ה-ε-ים וקיימים $q_0, q_1, \dots, q_k \in Q$ כך ש-

- $q_0 \in S$
- לכל $i \in [k]$ מתקיים $q_i \in \delta(q_{i-1}, \tilde{x}_i)$
- $q_k \in F$

<u>טענה:</u> לכל אסל"ד N (עם מעברי ε) קיים אסל"ד- N' (ללא מעברי ε) כך ש- $L(N) = L(N')$

<u>מסקנה:</u> לכל אסל"ד N (עם מעברי ε) קיים אס"ד A כך ש- $L(N) = L(A)$. בפרט, שפה היא רגולרית אם"ם קיים אסל"ד המקבל אותה.

<u>רעיון הוכחת הטענה:</u> נוסיף "קיצורי דרך" לפונק' המעברים שלנו שיאפשרו לנו "לדלג" על מעברי אפסילון. דוגמה:



<u>הוכחת הטענה:</u>
יהי $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסל"ד. נגדיר אסל"ד- $N' = (Q, \Sigma, \delta', S', F)$ כאשר

$$\delta'(q,\sigma) = E\big(\delta(q,\sigma)\big), \qquad S' = E(S)$$

על מנת להשלים את ההוכחה מספיק להראות כי לכל $T \subseteq Q$ ולכל $x \in \Sigma^*$ מתקיים

$$\hat{\delta}'(T,x) = \hat{\delta}(T,x)$$

עשו זאת בעצמכם, באינדוקציה על אורך x. הנה צעד האינדוקציה:

$$\hat{\delta}'(T,x\sigma) \underset{\text{הגדרת } \hat{\delta}'}{=} \bigcup_{q\in\hat{\delta}'(T,x)} \delta'(q,\sigma) \underset{\text{ה.א.}}{=} \bigcup_{q\in\hat{\delta}(T,x)} \delta'(q,\sigma) \underset{\text{הגדרת } \delta'}{=} \bigcup_{q\in\hat{\delta}(T,x)} E\big(\delta(q,\sigma)\big)$$

$$\underset{\text{סדר פעולות}}{=} E\left(\bigcup_{q\in\hat{\delta}(T,x)} \delta(q,\sigma)\right) \underset{\text{הגדרת } \hat{\delta}}{=} \hat{\delta}(T,x\sigma)$$

מ.ש.ל.

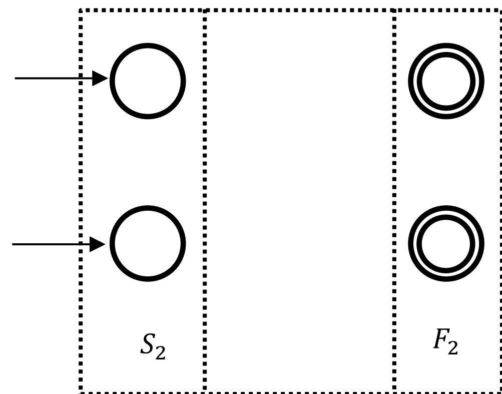
מעתה נשכח מהמושג אסל"ד- ונחשוב רק על אסל"ד (עם מעברי ε).

סגירות לפעולות רגולריות בעזרת אסל"ד

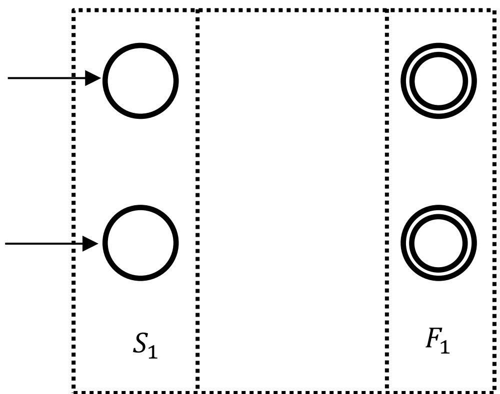
בשיעור שעבר ניסחנו כמה פעולות על שפות וטענו שהן משמרות רגולריות. כעת נראה כיצד להוכיח סגירות באמצעות אסל"ד. נתמקד בשלוש פעולות המכונות:

<u>הפעולות הרגולריות:</u> איחוד, שרשור, סגור-קליני

<u>איחוד (הוכחה אלטרנטיבית):</u>



$N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, S_2, F_2)$



$N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, S_1, F_1)$

* יתכן $S_i \cap F_i \neq \emptyset$. בציור זרים רק לשם נוחות הציור.

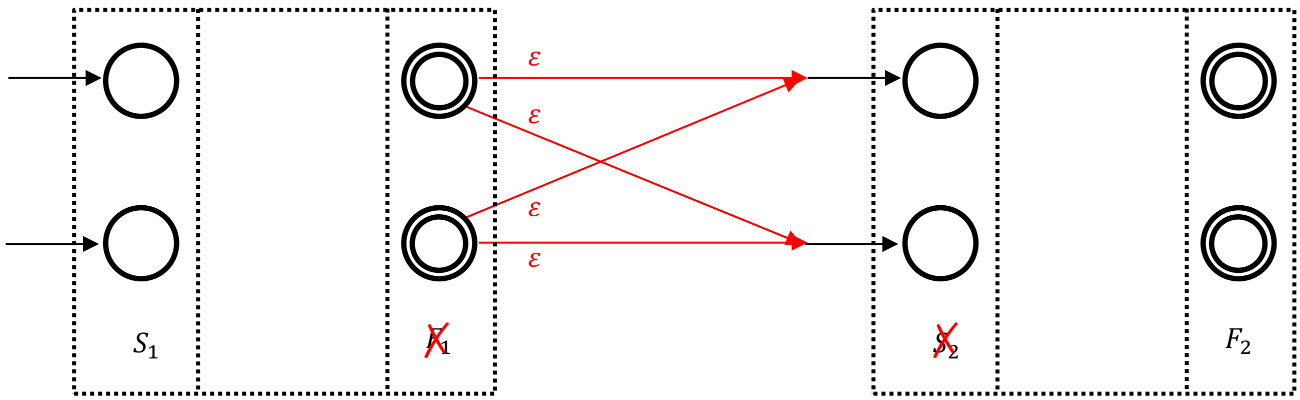
נניח בה"כ $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$. נגדיר $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ עבור האיחוד:

$$Q = Q_1 \cup Q_2$$
$$S = S_1 \cup S_2$$
$$F = F_1 \cup F_2$$
$$\forall i \in \{1,2\}, \quad q \in Q_i, \quad \sigma \in \Sigma_\varepsilon: \qquad \delta(q,\sigma) = \delta_i(q,\sigma)$$

נכונות נובעת מההגדרות. עשו זאת בעצמכם!

שרשור:

$$L_1L_2 = \{x_1x_2 : x_1 \in L_1\ ,\ \ x_2 \in L_2\}$$



$N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, S_1, F_1)$ $\qquad\qquad$ $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, S_2, F_2)$

באופן פורמלי: נניח בה"כ כי ב- N_1, N_2 אין מעברי ε (זה יפשט במעט את הבניה) וגם $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

נגדיר $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ באופן הבא:

$$Q = Q_1 \cup Q_2 \qquad , \qquad S = S_1 \qquad , \qquad F = F_2$$

"מעברי אות" בתוך כל אחד מהאוטומטים:

$$\forall i \in \{1,2\},\ \ q \in Q_i,\ \ \sigma \in \Sigma: \quad \delta(q, \sigma) = \delta_i(q, \sigma)$$

"מעברי אפסילון" בין האוטומטים:

$$\forall q \in F_1: \quad \delta(q, \varepsilon) = S_2$$

נכונות:

$\Leftarrow$

יהיו $x \in L_1,\ \ y \in L_2$. נראה $xy \in L(N)$.

קיימים מצבים $a_0, a_1, \dots, a_n \in Q_1$ כאשר $n = |x|$, $a_0 \in S_1$, $a_n \in F_1$, $a_i \in \delta_1(a_{i-1}, x_i)$.
בדומה, קיימים מצבים $b_0, b_1, \dots, b_m \in Q_2$ עבור y ו- $m = |y|$.

נסתכל על המחרוזת $\tilde{z} = x\varepsilon y \in \Sigma_\varepsilon^*$ ונסתכל על סדרת המצבים
$$q_0 \dots q_k \quad := \quad a_0 \dots a_n b_0 \dots b_m$$

כעת מתקיים ש- $q_0 \in S_1$, $q_k \in F_2$ ולכל i מתקיים $q_i \in \delta(q_{i-1}, \tilde{z}_i)$.

בפרט $xy \in L(N)$

$\Longrightarrow$

תהי $z \in L(N)$. אזי קיים $k \geq 0$, קיים $\tilde{z} \in \Sigma_\varepsilon^k$ וקיימים מצבים $q_0 \dots q_k$ כך ש-

$$q_i \in \delta(q_{i-1}, \tilde{z}_i) \;\;,\;\; q_k \in F_2 \;\;,\;\; q_0 \in S_1$$

כאשר z מתקבל מ- $\tilde{z}$ ע"י מחיקת ε-ים.

<u>**טענה:**</u> קיים $0 \leq j \leq k-1$ כך שמתקיים:

(א) $\tilde{z} = z_1 \dots z_j \; \varepsilon \; z_{j+1} \dots z_{k-1}$

(ב) $q_0, \dots, q_j \in Q_1$

(ג) $q_{j+1}, \dots, q_k \in Q_2$

(ד) $q_j \in F_1 \;\;,\;\; q_{j+1} \in S_2$

הטענה הזאת נובעת מהבנייה שלנו (לפי איך שהגדרנו את פונק' המעברים). חשבו על זה בבית.

מהטענה נובע כי $z_1 \dots z_j \in L_1$ ו- $z_{j+1} \dots z_{k-1} \in L_2$ ולכן $z = z_1 \dots z_{k-1} \in L_1 L_2$.

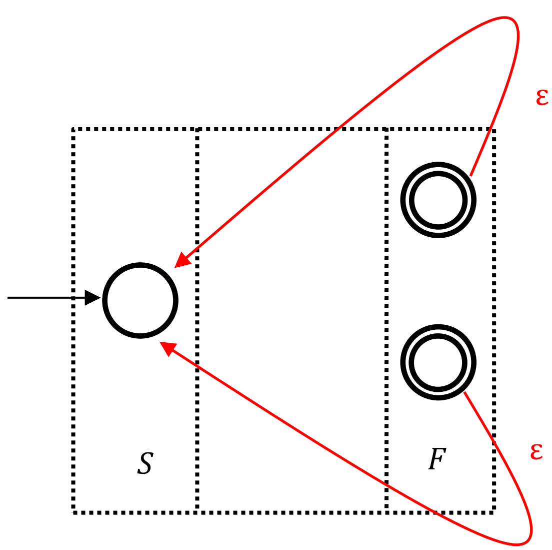
מ.ש.ל.

<u>**סגור קליני**</u>

$$L^* = \{x_1 \dots x_k : k \geq 0 \;\;,\;\; x_i \in L\}$$

נניח $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסל"ד ללא מעברי ε המקבל את L.

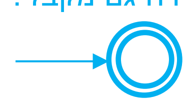
נסיון ראשון:



האם מקבל את L^* ?
לא בהכרח מקבלים ε...

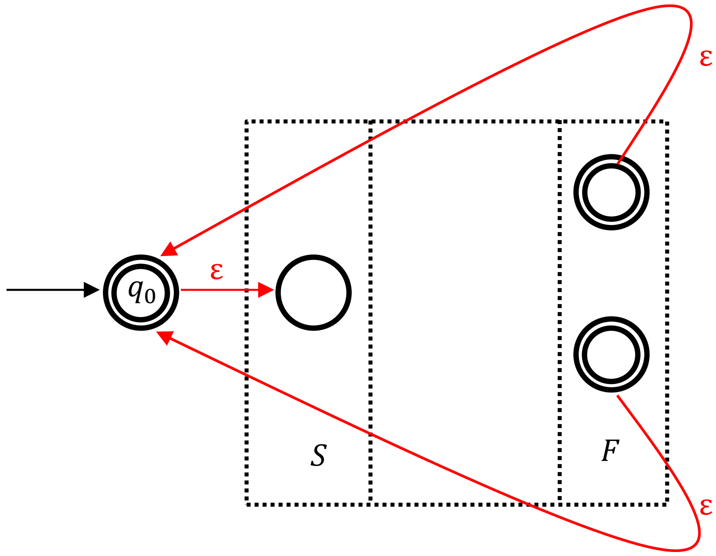
מה אם נהפוך כל $q \in S$ למקבל?
זה יכול לגרום שנקבל מילים שהם לא בשפה,
כי יתכן שריצה של האוטומט המקורי מתחילה
במצב תחילי, "מטיילת" קצת ואז מסיימת חזרה
במצב תחילי שהוא לא מקבל ולכן המילה לא מתקבלת

שאלה: אולי נוסיף <u>עוד</u> מצב תחילי <u>חדש</u>
שהוא יהיה גם מקבל?



תשובה: זה יעבוד. עכשיו נראה תיקון אחר

תיקון:



פורמלית נגדיר $N' = (Q', \Sigma, \delta', S', F')$ כאשר:

- $Q' = Q \cup \{q_0\}$ (עבור $q_0 \notin Q$)
- $F' = F \cup \{q_0\}$
- $$\delta'(q,\sigma) = \begin{cases} \delta(q,\sigma) & , \quad q \in Q \ \& \ \sigma \in \Sigma \\ \{q_0\} & , \quad q \in F \ \& \ \sigma = \varepsilon \\ S & , \quad q = q_0 \ \& \ \sigma = \varepsilon \end{cases}$$

הוכחת נכונות דומה לשרשור. עשו זאת בעצמכם!

ביטויים רגולריים

לעיתים נרצה לתאר שפה רגולרית באמצעות ביטוי המשתמש בפעולות בסיסיות באופן אנלוגי לביטוי אריתמטי. אבני הבניין יהיו שפות מאוד פשוטות ונרכיב בעזרת פעולות רגולריות ביטויים מורכבים יותר.

<u>הגדרה:</u> ביטויים רגולריים (ב"ר) מוגדרים בצורה רקורסיבית:

	ביטוי רגולרי R	**שפה $L(R)$ שהביטוי מייצג**
אורך 1	$\emptyset$	$\emptyset$
	ε	$\{\varepsilon\}$
	a עבור $a \in \Sigma$	$\{a\}$
אורך >1	$(R_1 \cup R_2)$ עבור ב"ר R_1, R_2	$L(R_1) \cup L(R_2)$
	$(R_1 R_2)$ עבור ב"ר R_1, R_2	$L(R_1)\, L(R_2)$
	(R^*) עבור ב"ר R	$L(R)^*$

סימון: $R(\Sigma)$ כל הביטויים הרגולריים מעל Σ

הערה: ניתן להשמיט סוגריים לפי סדר הקדימות הבא:
- $*$ קודם לכל (אנלוגי לחזקה)
- אח"כ שרשור (אנלוגי לכפל)
- לבסוף איחוד (אנלוגי לחיבור)

דוגמאות:

$$a \cup b^* = a \cup (b^*) \qquad , \qquad ab^* \neq (ab)^*$$

עוד דוגמאות:

א. התו שלישי מהסוף הוא 1: $(0 \cup 1)^*1(0 \cup 1)(0 \cup 1) = (0 \cup 1)^*1(0 \cup 1)^2$

ב. מס' 1 זוגי: $(0 \cup 10^*1)^*$

ג. מס' 1 אי-זוגי: $(0 \cup 10^*1)^*10^*$

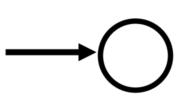
שימוש נפוץ בסקריפטים וחיפוש מחרוזות

משפט: שפה ניתנת לתיאור ע"י ביטוי רגולרי אם"ם היא רגולרית

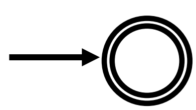
$\Longrightarrow$ בהינתן ביטוי רגולרי נבנה אסל"ד.

באינדוקציה על אורך הביטוי R. בסיס:

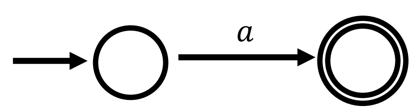
$\underline{R = \emptyset}$



$\underline{R = \varepsilon}$



$\underline{R = a}$



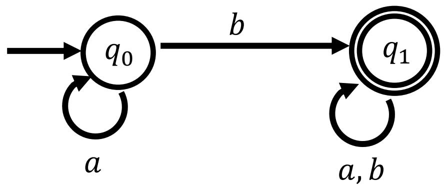
עבור ביטויים באורך לפחות 2 יש שלוש אפשרויות:

$$R_1^* \qquad R_1R_2 \qquad R_1 \cup R_2$$

כאשר באינדוקציה ל- R_1, R_2 יש אסל"ד ולכן צעד האינדוקציה נובע מהסגירות לפעולות רגולריות.

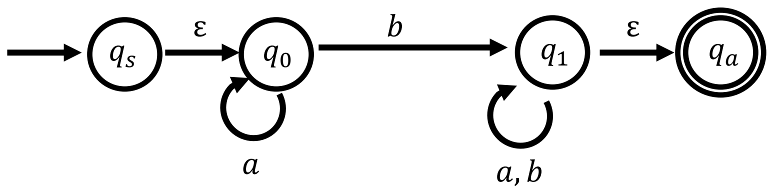
$\Leftarrow$ בהינתן שפה רגולרית ניתן לבנות ביטוי רגולרי. לא נוכיח.

אינטואיציה להעשרה בלבד: בהינתן אס"ד, נהפוך אותו בשלבים ל- "אסלד מוכלל" אשר על הקשתות שלו נוכל לרשום גם ביטויים רגולריים ולא רק תווים:

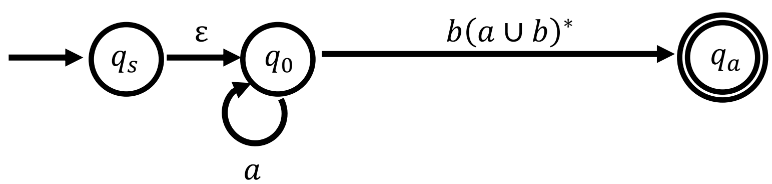


נוסיף שני מצבים:

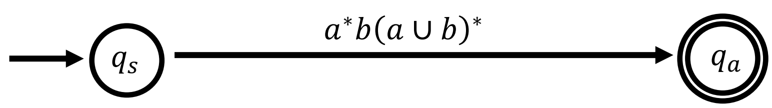
- מצב תחילי q_s עם מעבר ε ממנו למצב התחילי הקודם
- מצב מקבל q_a עם מעברי ε אליו מכל מצב מקבל קודם



אחד אחרי השני, "ניפטר" מכל מצב $q \in Q \setminus \{q_a, q_b\}$, על ידי כך שנמחוק אותו ואז "נתקן" את האוטומט על ידי שינוי הביטויים הרגולריים במעברים אליו וממנו.



ואז



בצורה יותר כללית, כאשר אנחנו רוצים "להיפטר" ממצב $q \in Q \setminus \{q_a, q_b\}$, לכל $q_i, q_j \in Q \setminus \{q\}$ נסמן:

- R_1 הביטוי הרגולרי עבור המעבר מ- q_i ל- q (יתכן $R_1 = \emptyset$)
- R_2 הביטוי הרגולרי עבור המעבר מ- q לעצמו (יתכן $R_2 = \emptyset$)
- R_3 הביטוי הרגולרי עבור המעבר מ- q ל- q_j (יתכן $R_3 = \emptyset$)
- R_4 הביטוי הרגולרי עבור המעבר ישירות מ- q_i ל- q_j (שלא דרך q, יתכן $R_4 = \emptyset$)

לאחר מחיקת המצב q, נתקן את המעבר מ q_i ל- q_j להיות הביטוי הרגולרי $(R_1)(R_2)^*(R_3) \cup (R_4)$

בסופו של דבר נשאר עם "אוטומט מוכלל" כזה המכיל רק את שני המצבים q_a, q_b. הביטוי הרגולרי שמופיע על הקשת היחידה שמחברת בין שני המצבים האלה הוא הביטוי הרגולרי שמתאים לאוטומט שהתחלנו ממנו.