מודלים חישוביים	12.5.2025

הרצאה 7: רדוקציות ואי-כריעות

Based on previous iterations of this course, given by Nir Bitansky, Rotem Oshman, Iftach Haitner, and Omer Paneth.

מרצה: אורי שטמר

<u>תזכורת:</u> בשיעור שעבר התחלנו לדבר על "מחלקות חישוביות" שונות והגדרנו את
R = מחלקת הבעיות הכריעות
RE = מחלקת הבעיות הכריעות למחצה
$coRE$ = כל הבעיות שהמשלים שלהם ב RE

ראינו כי $R = RE \cap coRE$

הגדרנו על מני בעיות יחסית טבעיות סביב הנושא של "הבנת קוד":

$$ACC = \{\langle M,x\rangle : \text{מקבלת } M(x) \text{ כך ש } x \text{ וקלט } M \text{ קידוד של מ"ט } \langle M,x\rangle\} \in RE \setminus R$$

$$HALT = \{\langle M,x\rangle : \text{עוצרת } M(x) \text{ כך ש } x \text{ וקלט } M \text{ קידוד של מ"ט } \langle M,x\rangle\}$$

$$EMPTY = \{\langle M\rangle : L(M) = \emptyset \text{ כך ש } M \text{ קידוד של מ"ט } \langle M\rangle\}$$

ראינו בעזרת "רדוקציה" שאם אפשר להכריע את $HALT$ אז אפשר גם להכריע את ACC ומכאן הסקנו שגם $HALT$ אינה כריעה. באופן דומה הראינו שגם $EMPTY$ לא כריעה בעזרת רדוקציה מ ACC.

היום נראה רדוקציות נוספות ונפתח מתודולוגיה כללית לקביעת אי-כריעות.

תרגיל כיתה לחימום: תהי $L \in RE \setminus R$. הראו כי $\overline{L} \in coRE \setminus R$.
פתרון: מכיוון ש- $L \in RE$ אז לפי הגדרת $coRE$ נובע כי $\overline{L} \in coRE$.
בנוסף, מכיוון ש- $L \notin R$ אז גם $\overline{L} \notin R$ וקיבלנו כי $\overline{L} \in coRE \setminus R$.

מסקנה: $\overline{ACC} \in coRE \setminus R$.

באופן דומה, אם $L \in coRE \setminus R$ אז $\overline{L} \in RE \setminus R$.

הגדרה:

$$REG = \left\{\langle M\rangle : \begin{matrix} M \text{ קידוד של מ"ט } \langle M\rangle \\ \text{רגולרית } L(M) \text{ כאשר} \end{matrix}\right\}$$

במילים, REG היא שפת כל קידודי המ"ט $\langle M\rangle$ כך שהשפה שהם מקבלים היא רגולרית. כלומר יש גם אוטומט שמכריע את השפה $L(M)$.

טענה: $REG \notin R$

<u>הוכחה:</u> נראה כי $ACC \le REG$.

ברדוקציה שתיכף נראה, ניעזר בהגדרה הבאה: לכל מ"ט M וקלט $x \in \Sigma^*$ נגדיר מ"ט M_x^{01} באופן הבא:

M_x^{01} בהינתן קלט $y \in \Sigma^*$:

- אם y הוא מהצורה $0^n\ 1^n$ אז נקבל
- אחרת נריץ את $M(x)$ ונקבל אם"ם M מקבלת

נשים לב שמתקיים:

(א)) אם $M(x)$ מקבלת אז $L(M_x^{01}) = \Sigma^*$ ובפרט $L(M_x^{01})$ רגולרית.

(ב)) אם $M(x)$ לא מקבלת אז $L(M_x^{01}) = \{0^n\ 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ ובפרט $L(M_x^{01})$ אינה רגולרית.

כעת, בהינתן מכריע G עבור REG נבנה מכריע A עבור ACC באופן הבא:

A בהינתן קלט $\langle M, x\rangle$:

- אם $\langle M, x\rangle$ לא קידוד חוקי, אז נדחה
- נחשב את הקידוד $\langle M_x^{01}\rangle$ ונריץ $G(\langle M_x^{01}\rangle)$
- נקבל אם"ם G מקבלת

מתקיים:

- אם $\langle M, x\rangle \in ACC$ אז $x \in L(M)$ ולכן לפי (א)) $L(M_x^{01})$ רגולרית ולכן $G(\langle M_x^{01}\rangle)$ מקבל
- אם $\langle M, x\rangle \notin ACC$ אז $x \notin L(M)$ ולכן לפי (ב)) $L(M_x^{01})$ לא רגולרית ו- $G(\langle M_x^{01}\rangle)$ דוחה

מ.ש.ל.

הגדרה:
$$EQ = \left\{ \langle M_1, M_2\rangle : \begin{array}{c} \langle M_1, M_2\rangle \text{ קידוד של מ"ט } M_1, M_2 \\ L(M_1) = L(M_2) \text{ כאשר} \end{array} \right\}$$

טענה: $EQ \notin R$

<u>רעיון ההוכחה:</u> הפעם נראה רדוקציה מ- $EMPTY$ ל- EQ. כלומר נראה $EMPTY \le EQ$. ספציפית, בהינתן מכריע Q עבור EQ נבנה מכריע E עבור $EMPTY$ באופן הבא:

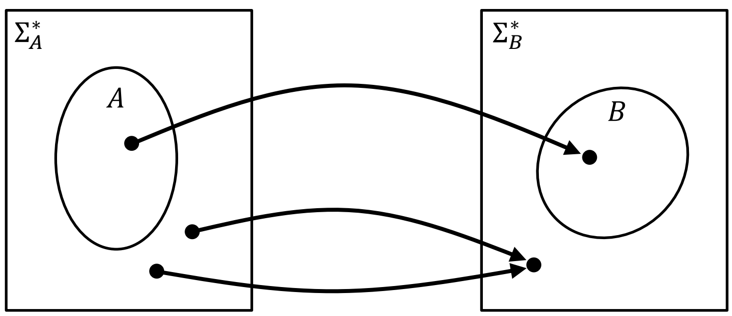
- E בהינתן קלט $\langle M\rangle$ נבנה קידוד של מ"ט $\langle A_\emptyset\rangle$ כך שמתקיים $L(A_\emptyset) = \emptyset$ ואז נשתמש ב $Q(\langle M, A_\emptyset\rangle)$ כדי לקבוע האם $L(M) = L(A_\emptyset) = \emptyset$.

הוכחה פורמלית – השלימו בעצמכם.

רדוקציות מיפוי

עד כה ראינו כמה רדוקציות והגדרנו את המושג באופן חצי-פורמלי. כעת נגדיר באופן פורמלי סוג מסוים ומאוד שימושי של רדוקציות – "רדוקציות מיפוי". זה יהיה סוג הרדוקציות העיקריות שילווה אותנו בהמשך הקורס וכפי שנראה היום יהיו לו תכונות שימושיות. למעשה רוב הרדוקציות שראינו עד עכשיו היו רדוקציות מיפוי (פרט לרדוקציות $F \leq ACC$ ו- $ACC \leq EMPTY$ מהשיעור שעבר).

נתחיל עם ציור: נניח שיש לנו 2 שפות A, B. **רדוקציית מיפוי** זה פשוט "מיפוי" שיודע למפות כל קלט ב- A לקלט ב- B וכל קלט שהוא לא ב- A הוא ימפה לקלט שהוא לא ב- B.



למשל, הרדוקציה $ACC \leq REG$ שהראינו הייתה בדיוק כזאת:
הראינו דרך "לתרגם" קלט $\langle M, x\rangle$ עבור ACC לקלט $\langle M_x^{01}\rangle$ עבור REG כך ש- $\langle M, x\rangle \in ACC$ אם"ם $\langle M_x^{01}\rangle \in REG$.

מה שהיה חשוב לנו ברדוקציה הזאת זה "שהתרגום" הזה יהיה חשיב – כלומר שנוכל לבצע את התרגום הזה באמצעות מ"ט. באופן אנלוגי, כדי לפרמל את המושג הזה של "רדוקציות מיפוי", הדבר הראשון שאנחנו צריכים להגדיר זה מזה "תרגום/מיפוי <u>חשיב</u>":

הגדרה: תהי $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \dots)$ מ"ט, תהי $D \subseteq \Sigma^*$ תת קבוצה של Σ^*, ותהי $\{\sqcup\} \setminus f: D \to \Gamma^*$ פונק'.
נאמר כי M <u>מחשבת את הפונקציה</u> f אם לכל קלט $x \in D$ מתקיים ש- $M(x)$ עוצרת ובסיום הריצה על הסרט כתוב $f(x)\sqcup^\infty$.

נאמר שפונקציה f היא <u>חשיבה</u> אם קיימת מ"ט המחשבת אותה.

הגדרה: יהיו Σ_A, Σ_B אלפבית ויהיו $A \subseteq \Sigma_A^*$ ו- $B \subseteq \Sigma_B^*$ שפות. <u>רדוקציית מיפוי</u> מ- A ל- B היא פונקציה חשיבה $f: \Sigma_A^* \to \Sigma_B^*$ כך שלכל $x \in \Sigma_A^*$ מתקיים:

$$x \in A \quad \text{אם"ם} \quad f(x) \in B$$

סימון: אם קיימת רדוקציית מיפוי מ- A ל- B נסמן $A \leq_m B$.

שימו לב: $A \leq_m B$ אם"ם $\overline{A} \leq_m \overline{B}$. (ע"י אותה פונק' f... אפשר לראות את זה בציור הנ"ל)

הנה טענה שהשתמשנו בה כבר כמה פעמים בצורה *implicit*:

טענה 1: אם $A \leq_m B$ ו- B כריעה אז A כריעה.

<u>הוכחה:</u> תהי M_B מ"ט המכריעה את B. נבנה מ"ט M_A המכריעה את A באופן הבא. לכל קלט x, המ"ט M_A מחשבת את $f(x)$, מריצה את $M_B\big(f(x)\big)$ ועונה כמוה. נכונות נובעת מההגדרות. מ.ש.ל.

כרגע בעיקר נשתמש ברדוקציות מיפוי על מנת להוכיח אי-כריעות. בפרט, מהטענה הנ"ל, אם $A \leq_m B$ ו- A אינה כריעה אז גם B אינה כריעה.
כדוגמה ראשונה, נוכיח פעם נוספת אי-כריעות של $HALT$ הפעם באמצעות רדוקציית מיפוי.

טענה: $ACC \leq_m HALT$

<u>הוכחה:</u>
נראה פונק' חשיבה f מתאימה:

$f(w)$:
- אם w אינו קידוד חוקי של מ"ט+קלט אז נחזיר z כלשהו כך ש $z \notin HALT$.
- אם $w = \langle M, x\rangle$ קידוד חוקי אז נחזיר את הקידוד $\langle M_\infty, x\rangle$ עבור המ"ט M_∞ המוגדרת באופן הבא:

$M_\infty(y)$:
- נריץ את $M(y)$
- אם M מקבלת אז נקבל
- אם M דוחה אז נכנס ללולאה אינסופית

f הנ"ל חשיבה. עבור $w = \langle M, x\rangle$ קידוד חוקי מתקיים $w \in ACC$ אם"ם $f(w) \in HALT$:
- אם $w \in ACC$, כלומר $M(x)$ מקבלת, אז $M_\infty(x)$ מקבלת ולכן $f(w) = \langle M_\infty, x\rangle \in HALT$
- אם $w \notin ACC$, כלומר $M(x)$ דוחה/לא-עוצרת, אז $M_\infty(x)$ לא-עוצרת ולכן $f(w) = \langle M_\infty, x\rangle \notin HALT$

* כאשר w קידוד לא חוקי מתקיים ש- $w \notin ACC$ וגם $z = f(w) \notin HALT$.

כלומר סך הכל מתקיים $w \in ACC$ אם"ם $f(w) \in HALT$ ולכן f היא רדוקציית מיפוי מ ACC ל- HALT.

מ.ש.ל.

<u>תרגיל לחשיבה עצמאית:</u> הראו רדוקציה הפוכה, כלומר הראו $HALT \leq_m ACC$.
<u>רעיון הפתרון:</u> נגדיר פונק' f כך ש- $f(\langle M, x\rangle) = \langle M'_x, \varepsilon\rangle$ כאשר $M'_x(y)$ היא מ"ט אשר מתעלמת מהקלט שלה y, מריצה את $M(x)$, ואם M עוצרת אז M' מקבלת. כלומר M' היא מ"ט המקיימת: אם $M(x)$ עוצרת אז M' מקבלת כל דבר, ואם $M(x)$ לא עוצרת, אז M' לא עוצרת על אף קלט ולכן לא מקבלת כלום. אז

$$f(\langle M, x\rangle) = \langle M'_x, \varepsilon\rangle \in ACC \iff M'(\varepsilon) \text{ מקבלת } \iff M(x) \text{ עוצרת } \iff \langle M, x\rangle \in HALT$$

הגדרה:

$$HALT_\varepsilon = \left\{ \langle M \rangle : \begin{matrix} \langle M \rangle \text{ קידוד של מ"ט } M \\ \text{כאשר } M(\varepsilon) \text{ עוצרת} \end{matrix} \right\}$$

טענה: $HALT \leq_m HALT_\varepsilon$

הוכחה: נראה פונק' חשיבה f מתאימה:

$\boldsymbol{f(w)}$:

- אם w לא קידוד חוקי אז נחזיר $z \notin HALT_\varepsilon$ כלשהו
- אם $w = \langle M, x \rangle$ קידוד חוקי אז נחזיר את הקידוד $\langle M_x \rangle$

תזכורת: $M_x(y)$ מתעלמת מהקלט שלה y, מריצה $M(x)$ ואם עוצרת משיבה כמוה

f חשיבה. בנוסף, לכל קידוד חוקי $w = \langle M, x \rangle$ מתקיים:
$w \in HALT$ אם"ם $M(x)$ עוצרת אם"ם $M_x(\varepsilon)$ עוצרת אם"ם $f(w) = \langle M_x \rangle \in HALT_\varepsilon$.
קידוד לא חוקי איננו ב $HALT$ וממופה ל $z \notin HALT_\varepsilon$. מ.ש.ל.

שימו לב שרדוקציות מיפוי אינן סימטריות. בפרט:

טענה: אם $A \in R$ וגם $B \notin R$ אז $A \leq_m B$ וגם $B \not\leq_m A$

הוכחה:

$A \not\leq_m B$ לפי טענה 1 ממקודם (אם $A \leq_m B$ ו- A כריעה אז B כריעה).

נראה כי קיימת רדוקציית מיפוי f מ- A ל- B.

אבחנה: אם $B \notin R$ אז קיימים $b \in B$ ו- $\bar{b} \notin B$. (מדוע?)

נגדיר

$$f(w) = \begin{cases} b & , \quad w \in A \\ \bar{b} & , \quad w \notin A \end{cases}$$

נכונות נובעת מיידית מהגדרת f: קלט $w \in A$ ממופה ל $b \in B$ וקלט $w \notin A$ ממופה ל $\bar{b} \notin B$.
מדוע f חשיבה? כי $A \in R$. כלומר, המ"ט שמחשבת את f, בהינתן קלט x קודם כל מריצה את $M_A(x)$ כאשר M_A היא מ"ט המכריעה את A, ואז פולטת b או $\bar{b}$ בהתאם להאם M_A קיבלה או דחתה.

מ.ש.ל.

שימו לב: ההוכחה הנ"ל בעצם מראה כי לכל $A \in R$ ולכל $B \notin \{\emptyset, \Sigma^*\}$ מתקיים $A \leq_m B$.

רדוקציות מיפוי ו- *RE*

כפי שראינו בטענה 1, אם $A \leq_m B$ ו- $B \in R$ אז גם $A \in R$. זה היה נכון גם לגבי המושג הקודם של רדוקציות שהגדרנו בשיעור שעבר. עכשיו נראה שרדורציות מיפוי מבטיחות עוד דברים:

טענה 2: יהי Σ אלפבית ויהיו $A, B \subseteq \Sigma^*$ שפות כך ש- $A \leq_m B$. אזי:
(1) אם $B \in RE$ אז $A \in RE$
(2) אם $B \in coRE$ אז $A \in coRE$

הטענה הזאת היא אחת הסיבות העיקריות לכך שאנחנו אוהבים רדוקציות מיפוי. הטענה הזאת לא בהכרח נכונה לגבי המושג הקודם של רדוקציות שדיברנו עליו. למשל, בשיעור שעבר ראינו רדוקציה $F \leq ACC$ כאשר $F \notin RE$ ו- $ACC \in RE$. באופן דומה, ראינו $ACC \leq EMPTY$ כאשר $EMPTY \in coRE$ אבל $ACC \notin coRE$.

<u>הוכחה:</u> דומה למקרה של הכרעה (טענה 1 למעלה) רק שמתשמשים ב- M_B שמקבלת (ולא בהכרח מכריעה) את B עבור ההוכחה של (1), ומשתמשים ב- $M_{\overline{B}}$ שמקבלת את $\overline{B}$ עבור ההוכחה של (2).

למשל, עבור (2) תהי M_B מ"ט המקבלת את $\overline{B}$. נבנה מ"ט $M_{\overline{A}}$ המקבלת את $\overline{A}$ באופן הבא. לכל קלט x, המ"ט $M_{\overline{A}}$ מחשבת את $f(x)$, מריצה את $M_{\overline{B}}(f(x))$ ומקבלת/דוחה/לא-עוצרת כמוה. נקבל ש- $x \in \overline{A}$ אם"ם $f(x) \in \overline{B}$ אם"ם $M_{\overline{B}}(f(x))$ מקבלת אם"ם $M_{\overline{A}}(x)$ מקבלת.

מ.ש.ל.

נוכל להשתמש בטענה הנ"ל על מנת להוכיח כי שפות מסויימות לא ב- RE. איך? נניח שאנחנו כבר יודעים ש- $A \notin RE$ עבור שפה A כלשהי. אם נראה שמתקיים $A \leq_m B$ אז נסיק שגם $B \notin RE$. למשל, מקודם הראנו כי $EQ \notin R$. כעת נראה:

טענה: $EQ \notin RE \cup coRE$.
כלומר $EQ \notin R$ וגם $EQ \notin coRE$

<u>הוכחה:</u>
בשיעור שעבר ראינו כי $ACC \in RE \setminus R$. לכן $\overline{ACC} \in coRE \setminus R$
(מדוע? $ACC \in RE \Leftarrow \overline{ACC} \in coRE$. בנוסף $ACC \notin R \Leftarrow \overline{ACC} \notin R$)
לכן $\overline{ACC} \notin RE$
(כי $R = RE \cap coRE$)

לכן, לפי טענה 2, כדי להראות ש- $EQ \notin RE \cup coRE$ מספיק להראות ש-
(א) $\overline{ACC} \leq_m EQ$ (זה יראה ש- $EQ \notin RE$)
(ב) $\overline{ACC} \leq_m \overline{EQ}$ (זה יראה ש- $\overline{EQ} \notin RE$, כלומר $EQ \notin coRE$)

כלומר אנחנו הולכים להראות 2 רדוקציות מיפוי.

(א) נראה כי $\overline{ACC} \leq_m EQ$

$f(w)$:
- אם w לא קידוד חוקי (בפרט $w \in \overline{ACC}$) אז נחזיר $z \in EQ$ כלשהו
- אם $w = \langle M, x \rangle$ קידוד חוקי אז נחזיר קידודים של מכונות $\langle M_x, A_\emptyset \rangle$

תזכורות: $M_x(y)$ מתעלמת מהקלט שלה y, מריצה $M(x)$ ואם עוצרת משיבה כמוה. $A_\emptyset$ היא מכונה כלשהי כך ש- $L(A_\emptyset) = \emptyset$.

עבור קידוד חוקי $w = \langle M, x \rangle$ מתקיים:

$$w = \langle M, x \rangle \in \overline{ACC} \iff M(x) \text{ לא מקבלת } \iff L(M_x) = \emptyset \iff f(w) = \langle M_x, A_\emptyset \rangle \in EQ$$

עבור קידוד לא חוקי, הנכונות נובעת מהבניה.

(ב) נראה כי $\overline{ACC} \leq_m \overline{EQ}$

הרדוקציה דומה... צריך להחליף את $A_\emptyset$ ב- A_{Σ^*}. השלימו את הפרטים לבד!

משפט רייס

עד כה ראינו מס' תוצאות אי-כריעות פרטניות. כעת ניתן אפיון של משפחה רחבה של בעיות שאינן ניתנות להכרעה. בהמשך למה שראינו עד כה, משפחה זו של בעיות עוסקות "בהבנת קוד של תוכנית".

דוגמאות: בהינתן קידוד $\langle M \rangle$, האם ניתן להכריע את הבעיות:
- האם ל- M יותר מ- 10 מצבים? כן
- האם M מקבלת את המילה הריקה ε תוך מאה צעדים? כן
- האם M מקבלת את ε בכלל? כריעה למחצה, אבל לא כריעה (בדומה ל $HALT_\varepsilon$)
- האם M מקבלת מס' סופי של קלטים? לא כריעה

משפט רייס אומר שבהינתן קידוד $\langle M \rangle$ של מ"ט M לא ניתן להכריע בעיות התלויות אך ורק בשפה $L(M)$, אלא אם מדובר בתכונות טריוויאליות. בעיות כאלה נקראות "בעיות <u>סמנטיות</u>" (בניגוד לבעיות "לסינטקטיות" אשר תלויות בתיאור הספציפי של M).

<u>משפט רייס:</u> יהי $\mathcal{C} \subseteq RE$ אוסף שפות ב- RE ("תכונה סמנטית") כך ש- $\emptyset \neq \mathcal{C} \neq RE$ ("לא טריוויאלית"). אזי השפה

$$L_{\mathcal{C}} := \left\{ \langle M \rangle : \begin{array}{c} \text{קידוד של מ"ט } \langle M \rangle \\ L(M) \in \mathcal{C} \text{ המקיימת} \end{array} \right\}$$

לא כריעה, כלומר $L_{\mathcal{C}} \notin R$

שימו לב כי אם $\mathcal{C}$ טריוויאלית אז $L_{\mathcal{C}} \in R$ (מדוע?)

דוגמה לשימוש במשפט רייס: נסתכל על 2 השפות הבאות.

$$\text{Primes} = \{p \in \mathbb{N} \text{ ראשוני}\} \in R$$

$$\text{EQPrimes} = \left\{\langle M\rangle : \begin{matrix} \text{קידוד של מ"ט } \langle M\rangle \\ L(M) = \text{Primes} \end{matrix}\right\}$$

בטרמינולוגיה של משפט רייס מתקיים $\text{EQPrimes} = L_{\mathcal{C}}$ עבור $\mathcal{C} = \{\text{Primes}\}$ שאינו טריוויאלי. לכן ממשפט רייס נובע ש- $\text{EQPrimes} \notin R$.

הוכחת משפט רייס:

תהי $\mathcal{C} \subseteq RE$ כך ש- $\emptyset \neq \mathcal{C} \neq RE$. ההוכחה בהתאם לשני מקרים.

<u>מקרה א: $\emptyset \notin \mathcal{C}$.</u> נראה $HALT \leq_m L_{\mathcal{C}}$.

תהי $A \in \mathcal{C}$ (קיימת כזו משום ש- $\mathcal{C}$ לא טריוויאלית)
ותהי M_A מ"ט המקבלת את A (קיימת כזו משום ש- $A \in \mathcal{C} \subseteq RE$)

לכל מ"ט M וקלט x נגדיר מ"ט $M_x^{\mathcal{C}}$ באופן הבא:

$M_x^{\mathcal{C}}$ בהינתן קלט y:
1. מריצה את $M(x)$
2. מריצה את $M_A(y)$ ומקבלת אם"ם מקבלת.

מתקיים:
((א)) אם $M(x)$ לא-עוצרת אזי $L(M_x^{\mathcal{C}}) = \emptyset \notin \mathcal{C}$
((ב)) אם $M(x)$ עוצרת אזי $L(M_x^{\mathcal{C}}) = L(M_A) = A \in \mathcal{C}$

כעת נגדיר רדוקציית מיפוי מ- $HALT$ ל- $L_{\mathcal{C}}$:

$f(w)$:
- אם w לא קידוד חוקי אז נחזיר $z \notin L_{\mathcal{C}}$ כלשהו
- אם $w = \langle M, x\rangle$ קידוד חוקי אז נחזיר את הקידוד $\langle M_x^{\mathcal{C}}\rangle$

הפונקציה f חשיבה ולכל w מתקיים $w \in HALT$ אם"ם $f(w) \in L_{\mathcal{C}}$:
- אם w אינו קידוד חוקי אזי $w \notin HALT$ וגם $f(w) = z \notin L_{\mathcal{C}}$
- אם $w = \langle M, x\rangle \notin HALT$ אז $M(x)$ לא-עוצרת ולכן לפי ((א)) מתקיים $L(M_x^{\mathcal{C}}) = \emptyset \notin \mathcal{C}$ ולכן לפי הגדרת $L_{\mathcal{C}}$ מתקיים $f(w) = \langle M_x^{\mathcal{C}}\rangle \notin L_{\mathcal{C}}$.
- אם $w = \langle M, x\rangle \in HALT$ אז $M(x)$ עוצרת ולכן לפי ((ב)) מתקיים $L(M_x^{\mathcal{C}}) = L(M_A) = A \in \mathcal{C}$ ולכן לפי הגדרת $L_{\mathcal{C}}$ מתקיים $f(w) = \langle M_x^{\mathcal{C}}\rangle \in L_{\mathcal{C}}$.

כלומר, במקרה א הראנו כי $HALT \leq_m L_{\mathcal{C}}$ ומכיוון שאנו כבר יודעים ש- $HALT \notin R$ אז אנחנו מקבלים שגם $L_{\mathcal{C}} \notin R$.

<u>הערה:</u> למעשה, במקרה א הוכחנו משהו חזק יותר: לא רק ש- $L_{\mathcal{C}}$ היא מחוץ ל R, היא אפילו חייבת להיות מחוץ ל- $coRE$. כלומר $L_{\mathcal{C}} \notin coRE$. זאת אמירה יותר חזקה משום ש- $R \subseteq coRE$.

איך זה נובע ממה שעשינו כאן?
כי אם $L_{\mathcal{C}} \in coRE$ וגם $HALT \leq_m L_{\mathcal{C}}$ אז היינו מקבלים ש- $HALT \in coRE$. בצירוף עם העובדה ש- $HALT \in RE$ זה היה גורר ש- $HALT \in RE \cap coRE = R$ וזאת סתירה...

שאלה: איפה בהוכחה של מקרה א השתמשנו בהנחה ש- $\emptyset \neq \mathcal{C} \neq RE$?
תשובה: כל מה שהשתמשנו בו זה שקיימת שפה $A \in \mathcal{C}$ (נובע מכך ש- $\emptyset \neq \mathcal{C}$) והשתמשנו בכך שהשפה הריקה לא ב $\mathcal{C}$ (נובע מהתנאי של מקרה א, שבפרט גורר כי $\mathcal{C} \neq RE$)

<u>מקרה ב: $\emptyset \in \mathcal{C}$.</u> במקרה זה נראה ש- $L_{\mathcal{C}} \notin RE$ (ובפרט $L_{\mathcal{C}} \notin R$).

נשים לב שהתכונה $\overline{\mathcal{C}} = RE \setminus \mathcal{C}$ גם אינה טריוויאלית ומתקיים $\emptyset \notin \overline{\mathcal{C}}$.
לכן, על פי מקרה א מתקיים $L_{\overline{\mathcal{C}}} \notin coRE$ או לחילופין $\overline{L_{\overline{\mathcal{C}}}} \notin RE$.

מה זאת השפה $\overline{L_{\overline{\mathcal{C}}}}$? איזה קלטים נמצאים פה? כל הקלטים <u>שלא</u> נמצאים ב- $L_{\overline{\mathcal{C}}}$.
מי <u>לא</u> נמצא ב- $L_{\overline{\mathcal{C}}}$?
לפי ההגדרה (המופיעה בניסוח של משפט ריס), הקלטים <u>שלא</u> נמצאים ב- $L_{\overline{\mathcal{C}}}$ הם
(א) קידודים לא חוקיים
(ב) קידודים $\langle M \rangle$ כך ש- $L(M) \notin \overline{\mathcal{C}}$

כלומר, אם נסמן ב- INVALID את שפת כל המחרוזות שאינן קידוד חוקי של מ"ט אז מתקיים:

$$\overline{L_{\overline{\mathcal{C}}}} = \left\{ \langle M \rangle : \begin{array}{c} \text{קידוד של מ"ט } \langle M \rangle \\ L(M) \notin \overline{\mathcal{C}} \text{ המקיימת} \\ L(M) \in \mathcal{C} \text{ כלומר} \end{array} \right\} \cup \mathrm{INVALID} = L_{\mathcal{C}} \cup \mathrm{INVALID}$$

ומכיוון ש- $\mathrm{INVALID} \in R$ נובע שגם $L_{\mathcal{C}} \notin RE$.

מ.ש.ל. (משפט רייס)

למעשה הוכחנו את "הגרסה המורחבת" הבאה של משפט רייס:

<u>משפט רייס (הרחבה):</u>
- לכל $\mathcal{C} \subseteq RE$ לא טריוויאלית (כלומר $\emptyset \neq \mathcal{C} \neq RE$) כך ש- $\emptyset \notin \mathcal{C}$ מתקיים $L_{\mathcal{C}} \notin coRE$
- לכל $\mathcal{C} \subseteq RE$ לא טריוויאלית (כלומר $\emptyset \neq \mathcal{C} \neq RE$) כך ש- $\emptyset \in \mathcal{C}$ מתקיים $L_{\mathcal{C}} \notin RE$

<u>דוגמה נוספת לשימוש במשפט רייס:</u>
בתחילת ההרצאה ראינו כי

$$REG = \left\{ \langle M \rangle : \begin{matrix} M \text{ קידוד של מ"ט } \langle M \rangle \\ \text{ רגולרית } L(M) \text{ כאשר} \end{matrix} \right\} \notin R$$

(הראינו זאת ע"י רדוקציה מ ACC)

כעת נראה כי ממשפט רייס נובע כמעט מיידית שלמעשה מתקיים $REG \notin RE$.
אכן, בטרמינולוגיה של משפט רייס מתקיים $REG = L_{\mathcal{C}}$ עבור $\mathcal{C} = \{ L : \text{ רגולרית } L \}$.
מכיוון ש- $RE \subsetneq \mathcal{C} \in \emptyset$ נסיק ש- $REG \notin RE$.

<u>הערות לגבי משפט רייס:</u>
- המשפט נוגע בתכונות סמנטיות מהצורה "האם $L(M)$ מקיימת תכונה..."
- המשפט לא אומר כלום על תכונות סינטקטיות כגון:
  - "האם ל- M יש עשרה מצבים?" זאת בעיה <u>כריעה</u>
  - "האם בריצה על ε, המ"ט M עוברת במצב q_8?" זאת בעיה <u>לא כריעה</u> אבל לא ניתן להראות זאת דרך משפט רייס.

דוגמה הממחישה את ההערה הכחולה האחרונה:

מה נקבל ממשפט רייס עבור $\mathcal{C} = R$? זאת כמובן תכונה לא טריוויאלית ומתקיים $\emptyset \in \mathcal{C}$ כי השפה הריקה היא כריעה. לכן ממשפט רייס נקבל

$$L_R = \left\{ \langle M \rangle : \begin{matrix} \text{קידוד של מ"ט } \langle M \rangle \\ L(M) \in R \text{ המקיימת} \end{matrix} \right\} \notin RE$$

זאת שפת כל הקידודים $\langle M \rangle$ כך שמתקיים: <u>השפה ש- M מקבלת</u> היא כריעה.
שימו לב: עבור $\langle M \rangle \in L_R$ לא בהכרח מתקיים ש- M בעצמה מכריעה את $L(M)$. יתכן שהשפה $L(M)$ היא כריעה, כלומר קיימת מכונה אחרת שמכריעה אותה, אבל M רק <u>מקבלת</u>. למשל, עבור המכונה M' אשר לכל קלט y נכנסת ללולאה אינסופית מתקיים $L(M') = \emptyset$ שהיא שפה כריעה ולכן $\langle M' \rangle \in L_R$ למרות ש- M' לא מכריעה את $L(M') = \emptyset$. הדוגמה הזאת מצביעה על העובדה שמשפט רייס נוגע רק לשפה המתקבלת על ידי M ולא בתכונות אחרות של ה M הספציפית.

דוגמה לטכניקה נוספת: ריצות חסומות

<u>הגדרה:</u> יהי Σ אלפבית.

$$ALL = \left\{ \langle M \rangle : \begin{matrix} M \text{ קידוד של מ"ט } \langle M \rangle \\ L(M) = \Sigma^* \text{ המקיימת} \end{matrix} \right\}$$

<u>טענה:</u> $ALL \notin RE \cup coRE$

האם אפשר להשתמש במשפט רייס כדי להראות זאת? בטרמינולוגיה של משפט רייס מתקיים $ALL = L_{\mathcal{C}}$ עבור $\mathcal{C} = \{\Sigma^*\}$ כאשר $\mathcal{C}$ היא אכן לא טריוויאלית, אבל $\emptyset \notin \mathcal{C}$ ולכן ההרחבות שראינו מאפשרות לנו להסיק כי $ALL \notin coRE$ אך לא גוררות ש- $ALL \notin RE$...

אז נותר להראות ש- $ALL \notin RE$.

<u>הוכחה ש- $ALL \notin RE$:</u> נראה ש- $\overline{HALT} \leq_m ALL$.
מכיוון שאנו כבר יודעים כי $\overline{HALT} \notin RE$ (כי לפי תרגיל הכיתה מתחילת השיעור $\overline{HALT} \in coRE \setminus R$) זה יוכיח כי גם $ALL \notin RE$.

לצורך הצגת הרדוקציה, לכל מ"ט M וקלט x נגדיר מ"ט $B_{M,x}$ באופן הבא:

$\boldsymbol{B_{M,x}(y)}$:
• נריץ את $M(x)$ במשך $\|y\|$ צעדים ונקבל אם"ם M לא עצרה.

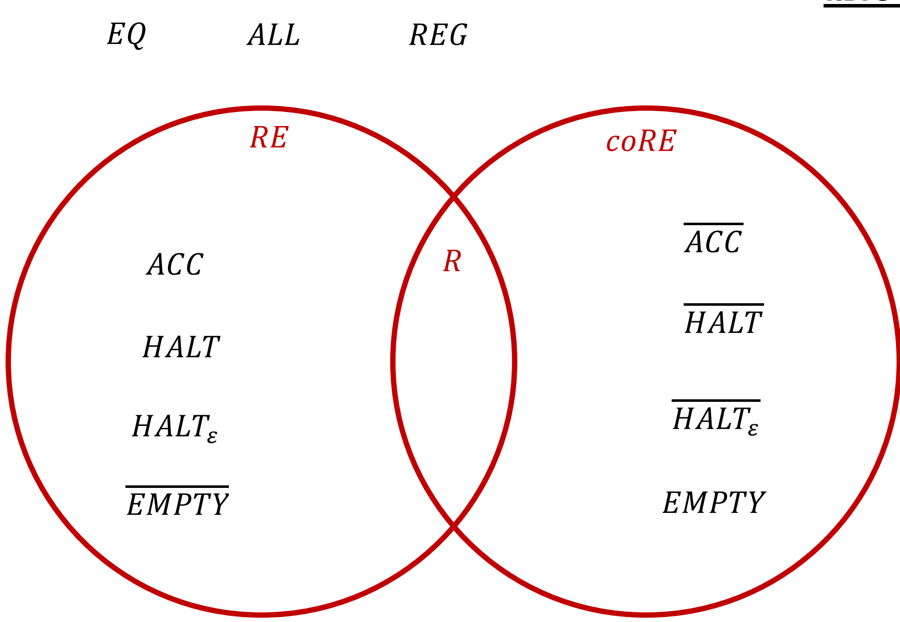
מתקיים:
- אם $M(x)$ לא-עוצרת אז $L(B_{M,x}) = \Sigma^*$
- אם $M(x)$ עוצרת לאחר k צעדים אז $L(B_{M,x}) = \{y \in \Sigma^* : |y| < k\} \neq \Sigma^*$

כעת נגדיר רדוקציית מיפוי מ- $\overline{HALT}$ ל- ALL באופן הבא:

$\boldsymbol{f(w)}$:
• אם w לא קידוד חוקי של מ"ט+קלט אז נחזיר $z \in ALL$ כלשהו
• אם $w = \langle M, x\rangle$ קידוד חוקי אז נחזיר את הקידוד $\langle B_{M,x}\rangle$

הפונקציה f חשיבה ולכל w מתקיים $w \notin HALT$ אם"ם $f(w) \in ALL$:
- אם w אינו קידוד חוקי אזי $w \notin HALT$ וגם $f(w) = z \in ALL$
- אם $w = \langle M, x\rangle \in HALT$ אזי $M(x)$ עוצרת ולכן $L(B_{M,x}) \neq \Sigma^*$ ולכן $\langle B_{M,x}\rangle \notin ALL$
- אם $w = \langle M, x\rangle \notin HALT$ אזי $M(x)$ לא-עוצרת ולכן $L(B_{M,x}) = \Sigma^*$ ולכן $\langle B_{M,x}\rangle \in ALL$

<u>סיכום ביניים – ציור של תמונת העולם שלנו:</u>



* עבור REG הראינו ש- $REG \notin RE$ בעזרת רייס. בנוסף, בתחילת השיעור הראינו $ACC \leq REG$. כפי שאמרנו, אפשר להפוך את הרדוקציה הזאת לרדוקציית מיפוי (בדקו!) ולקבל $REG \leq_m ACC$, מה שלפי טענה 2 מראה כי גם $REG \notin coRE$.