הרצאה 12: מסלולים קלים ביותר בגרף מכוון

מרצה: אורי שטמר

Textbook: Cormen, Leiserson, Rivest, Stein. Introduction to Algorithms.

תזכורות

בעיית המסלולים הקלים ביותר עם מקור יחיד:

קלט: גרף $G = (V, E)$ מכוון ופונקציית משקל $w: E \to \mathbb{R}$ וצומת $s \in V$ (צומת זה נקרא "המקור")

יש למצוא: לכל $v \in V$ מסלול קל ביותר מ- s ל- v

דיברנו על אלגוריתם גנרי לבעיה:

לכל קודקוד $v \in V$ נתחזק משתנה $dist(v)$ ומשתנה $\pi(v)$

הגדרנו פרוצדורת $\mathbf{Relax}(u,v)$

אם $(u,v) \in E$ וגם $dist(v) > dist(u) + w(u,v)$ אזי

$dist(v) \leftarrow dist(u) + w(u,v)$

$\pi(v) \leftarrow u$

האלגוריתם הגנרי

אתחול: $dist(s) = 0$ ו לכל $v \in V \setminus \{s\}$ בצע $dist(v) = \infty$

לכל $v \in V$ בצע $\pi(v) = \mathrm{Null}$

צעד: כל עוד קיימת קשת $(u,v) \in E$ כך ש- $dist(v) > dist(u) + w(u,v)$,

בחר קשת (u,v) כנ"ל ובצע $\mathrm{Relax}(u,v)$

הוכחנו לגבי האלגוריתם הגנרי: אם האלגוריתם הגנרי עוצר אזי:

(1) לכל $v \in V$ מתקיים $d(v) = \delta(s,v)$

(2) הגרף המוגדר על ידי המצביעים π, כלומר הגרף $\left(V, \left\{(\pi(v), v) : v \in V \setminus \{s\}\right\}\right)$, הוא עץ מסלולים זולים ביותר של גרף הקלט G (בהנחה שכל קודקוד בגרף G נגיש מ- s...)

דיברנו על האלגוריתם Dijkstra עבור המקרה בו אין משקולות שליליים:

אתחול: $S \leftarrow \emptyset$

$dist(s) = 0$

לכל $v \neq s$ בצע $dist(v) = \infty$

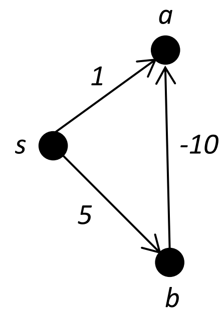
לכל $v \in V$ בצע $\pi(v) = \mathrm{Null}$

צעד: כל עוד $|S| < |V|$

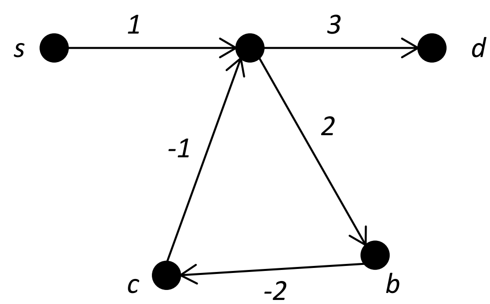
- בחר צומת $v \notin S$ עם $dist(v)$ מינימלי
- $S \leftarrow S \cup \{v\}$
- לכל צומת $x \notin S$ שכן של u, כלומר $(v,x) \in E$, בצע $\mathrm{Relax}(v,x)$

<u>מציאת מסלולים קלים ביותר בגרף עם משקולות שליליים</u>

האלגוריתם של Dijkstra לא עובד. למשל:



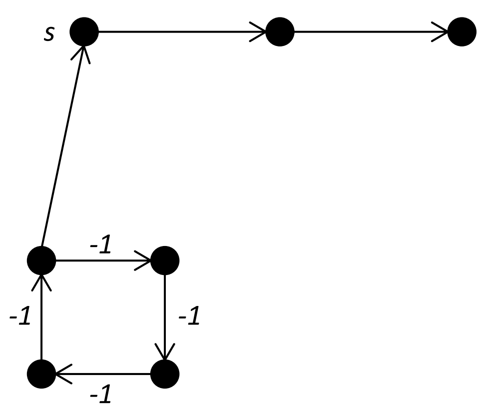
דוגמה נוספת:



מהו מסלול קל ביותר בגרף זה מ- s ל- d ?
בגרף הנ"ל <u>אין</u> מסלול קל ביותר מ- s ל- d.

נניח שאין מעגל עם משקל שלילי שיש אליו מסלול מ- s.

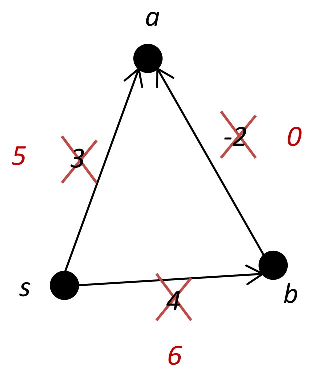
דוגמה נוספת:
מעגל שלילי כזה לא מפריע לנו...



<u>רעיון שלא עובד:</u> נגדיל את משקל כל הקשתות באותו קבוע כך שמשקל כל קשת יהיה חיובי. לאחר מכן נריץ את אלגוריתם Dijkstra.

<u>דוגמה נגדית:</u>

אם נוסיף 2+ למשקל כל קשת, אז נקבל <u>בטעות</u> שהמסלול הקצר ביותר מ- s ל- a הוא (s,a)



איך נתגבר על הבעיה? נזכור שהאלגוריתם הגנרי שדיברנו עליו לפני Dijkstra <u>כן</u> עובד גם כאשר יש משקולות שליליים בגרף. (הבעייה שלנו איתו הייתה זמן הריצה...)

אלגוריתם Bellman-Ford

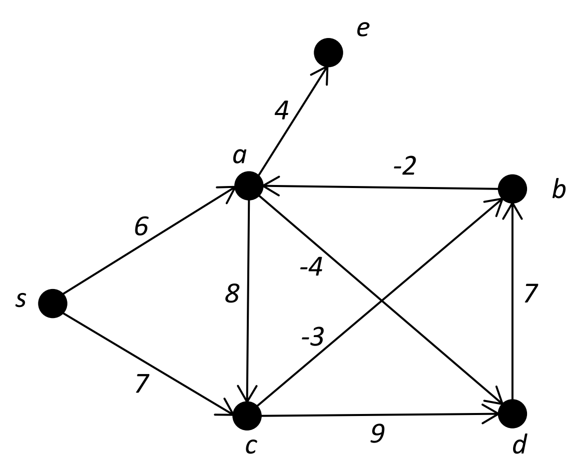
<u>אתחול:</u> $dist(s) = 0$, $\pi(s) = \text{Null}$
לכל $v \neq s$ בצע $dist(v) = \infty$ וגם $\pi(v) = \text{Null}$

<u>צעד:</u> עבור $i = 1$ עד $|V| - 1$ בצע:
לכל קשת $(u, v) \in E$ בצע $\text{Relax}(u, v)$

<u>סיום:</u> אם קיימת קשת $(u, v) \in E$ עבורה $dist(v) > dist(u) + w(u, v)$
אזי החזר "קיים מעגל שלילי שנגיש מ- s".
אחרת החזר את המרחקים $dist(\cdot)$ ואת המצביעים $\pi(\cdot)$.

<u>**הערה:**</u> האלגוריתם הזה לא אומר באיזה סדר בדיוק לעבור על הקשתות בכל איטרציה.

<u>דוגמת ריצה:</u>



סריקת הקשתות: קודם קשתות שיוצאות מ s, אח"כ קשתות שיוצאות מ a, אח"כ מ b, אח"כ מ c, אח"כ מ e

	אתחול	$i=1$					$i=2$	$i=3$	$i=4$
		קשתות שיוצאות מ- s	קשתות שיוצאות מ- a	קשתות שיוצאות מ- b	קשתות שיוצאות מ- c	קשתות שיוצאות מ- d			
s	0						0	0	0
a	∞	6					$\cancel{6}$ 2	2	2
b	∞				4		4	4	4
c	∞	7					7	7	7
d	∞		2				2	-2	-2
e	∞		10				10	6	6

<u>הערה:</u> יתכן שבאותה איטרציה נעדכן את אותו צומת כמה פעמים

<u>נסתכל על ריצה נוספת של האלגוריתם:</u>
סדר הקשתות:
(s,c)
(c,b)
(b,a)
(a,d)
(a,e)
ואז שאר הקשתות...

s	0	0
c	∞	2
b	∞	4
a	∞	7
d	∞	-2
e	∞	6

מסקנה: הסדר שבו אנו עוברים על הקשתות משפיע על הריצה!

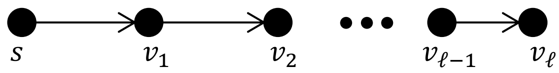
<u>אבחנה 0:</u> אם אין מעגל שלילי שנגיש מ- s אזי לכל v עם $\delta(s,v) \neq \infty$ קיים מסלול קל ביותר שהוא פשוט.

<u>הסבר:</u> יהי P מסלול קל ביותר מ- s ל- v. אם הוא פשוט אז סיימנו.
אם יש מעגל/ים אזי הם מעגלים במשקל אי-שלילי (כי הם נגישים מ- s). נוריד אותם ונקבל מסלול פשוט במשקל לא גדול ממשקלו של P.

<u>משפט:</u>
(א) אם אין בגרף מעגל שלילי שנגיש מ- s אליהם אזי בסוף ריצת האלגוריתם לכל $v \in V$ מתקיים $dist(v) = \delta(s,v)$ ובנוסף הגרף המוגדר על ידי המצביעים π הוא עץ מסלולים קלים ביותר.
(ב) אם יש מעגל שלילי שנגיש מ- s אזי נחזיר שיש מעגל שלילי.

<u>טענת עזר:</u> יהי $P = (s = v_0, v_1, v_2, \dots, v_\ell)$ מסלול מ- s ל- v_ℓ. אזי אחרי לכל היותר ℓ איטרציות יתקיים $dist(v_\ell) \leq w(P)$

<u>אינטואיציה לטענת העזר:</u>



באיטרציה הראשונה אנחנו סורקים את כל הקשתות. בפרט נסרוק את הקשת (s, v_1) ונבצע עליה Relax. לכן במהלך האיטרציה הראשונה הקודקוד v_1 יקבל סימון טוב. באיטרציה השניה אנחנו שוב סורקים את כל הקשתות ובפרט נסרוק את (v_1, v_2) ולכן v_2 יקבל סימון טוב, וכן הלאה.

<u>הוכחת טענת העזר:</u> נוכיח שהיא נכונה לכל v_i במסלול באינדוקציה על i.

<u>בסיס:</u> עבור $i = 0$ מתקיים $dist(s = v_0) \leq 0 = w(s)$

<u>צעד:</u> נניח שאחרי $i - 1$ איטרציות מתקיים

$$dist(v_{i-1}) \leq w(v_0, v_1, \dots, v_{i-1})$$

נוכיח שאחרי i איטרציות מתקיים

$$dist(v_i) \leq w(v_0, v_1, \dots, v_i)$$

באיטרציה ה- i סורקים את כל הקשתות ובפרט מבצעים Relax(v_{i-1}, v_i). לאחר מכן מתקיים

$$dist(v_i) \leq dist(v_{i-1}) + w(v_{i-1}, v_i) \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{\leq} w(v_0, v_1, \dots, v_{i-1}) + w(v_{i-1}, v_i) = w(v_0, v_1, \dots, v_i)$$

מ.ש.ל. (טענת העזר).

<u>הוכחת חלק א של המשפט</u>

מכיוון שאין בגרף מעגל שלילי שנגיש מ- s אזי לכל $v \in V$ מתקיים $\delta(s, v) > -\infty$
(הסבר: אם אין מסלול מ- s ל- v בגרף אזי $\delta(s, v) = \infty$, ואחרת $\delta(s, v)$ הוא סופי)

יהי $v \in V$ כלשהו.

אם $\delta(s, v) = \infty$ אזי גם $dist(v) = \infty$ ולכן $dist(v) = \delta(s, v)$.

אחרת, קיים מסלול קל ביותר מ- s ל- v.
על פי אבחנה 0, קיים מסלול כנ"ל P שהוא פשוט ולכן מכיל לכל היותר $|V| - 1$ קשתות.
לכן, על פי טענת העזר, אחרי $|V| - 1$ איטרציות מתקיים

$$dist(v) \leq w(P) = \delta(s, v) \underset{\text{טענת החסם העליון}}{\leq} dist(v)$$

ולכן

$$dist(v) = \delta(s, v)$$

כלומר, בסיום הריצה לכל $v \in V$ מתקיים $dist(v) = \delta(s, v)$. בפרט, בסיום הריצה אין אף Relax אפשרי, כלומר קיבלנו את תנאי העצירה של האלגוריתם הגנרי. לכן בנוסף אנו יודעים שהגרף המוגדר על ידי המצביעים π הוא עץ מסלולים קלים ביותר.

מ.ש.ל. (חלק א של המשפט).

<u>הוכחת חלק ב של המשפט</u>

אם יש בגרף מעגל שלילי הנגיש מ- s אזי קיים קודקוד v המקיים $\delta(s,v) = -\infty$.
אבל בשום שלב בריצה (ובפרט בסיום הריצה) לא יתכן כי $dist(v) = -\infty$ (כי לפי טענת החסם העליון, בכל שלב בריצה $dist(v)$ הוא משקל מסלול כלשהו מ- s ל- v ולכן הוא מספר סופי).

בפרט, לאחר $|V| - 1$ איטרציות קיים קודקוד v כך ש- $dist(v) > \delta(s,v)$.

משפט העצירה של האלגוריתם הגנרי אומר לנו שאם אין פעולת Relax אפשרית אזי $dist(u) = \delta(s,u)$ לכל u.
כלומר אם קיים v כך ש- $dist(v) \neq \delta(s,v)$ אזי קיימת פעולת Relax אפשרית.

לכן האלגוריתם מחזיר "קיים מעגל שלילי שנגיש מ- s".

מ.ש.ל. (חלק ב של המשפט)

<u>סיבוכיות האלגוריתם:</u>

- ישנן $O(|V|)$ איטרציות
- בכל איטרציה מבצעים Relax לכל קשת
- סה"כ ישנן $O(|V| \cdot |E|)$ פעולות Relax, וכל פעולה כזו עולה $O(1)$.

סה"כ זמן ריצה $O(|V| \cdot |E|)$.

חומר למחשבה

באלגוריתמים האחרונים היה לנו קודקוד מקור <u>יחיד</u> s ורצינו למצוא מסלול קל ביותר מ- s לכל קודקוד אחר בגרף.
מה אפשר לעשות אם אנחנו מעוניינים למצוא מסלול קל ביותר בין <u>כל זוג קודקודים בגרף</u>?

אם המשקלים בגרף הם אי-שליליים, נוכל להפעיל $|V|$ את אלגוריתם Dijkstra (כל פעם עם קודקוד אחר בתור קודקוד המקור). זמן ריצה:
$$O(|V|^2 \log|V| + |E| \cdot |V|)$$

אם יש משקלים שליליים בגרף, נוכל להפעיל $|V|$ פעמים את אלגוריתם Bellman-Ford. זמן ריצה:
$$O(|E| \cdot |V|^2)$$
נשים לב כי במקרה הגרוע, אם $|E| = O(|V|^2)$, נקבל סיבוכיות $O(|V|^4)$.

קיים אלגוריתם יעיל יותר למקרה זה, האלגוריתם של Johnson, אשר מבצע הפעלה <u>אחת</u> של Bellman-Ford ולאחר מכן מבצע $|V|$ הפעלות של Dijkstra. זמן ריצה:
$$O(|V|^2 \log|V| + |E| \cdot |V|)$$