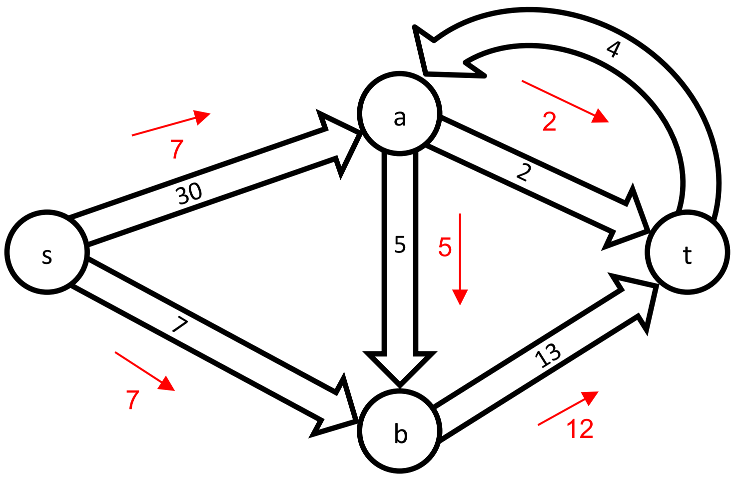
תכנון אלגוריתמים		29.11.2020

הרצאה 13: זרימה

מרצה: אורי שטמר

Textbook: Cormen, Leiserson, Rivest, Stein. Introduction to Algorithms.



יש לנו מערכת צינורות, כאשר בכל צינור אפשר להעביר מספר מסויים של יחידות.
יש לנו קודקוד מקוד s ויש לנו קודקוד יעד t.
השאלה שאנחנו שואלים את עצמנו היא מהי הכמות המקסימלית של זרימה שאנחנו יכולים להעביר מ- s ל- t.

<u>מוטיבציה:</u>

* צינורות מים
* רשת חשמל
* אינטרנט
* רשת כבישים
* משאיות
* שימושי בפתרון בעיות נוספות (למשל, בתרגול תראו איך פתור בעייה הנקראת "מציאת שידוך מקסימלי" בעזרת זרימה)

הגדרות

<u>הגדרה (רשת זרימה):</u>

רשת זרימה היא רביעייה $N = (G = (V, E), c, s, t)$ כאשר:

- $G = (V, E)$ גרף מכוון
- $c: V \times V \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ פונקציית קיבולים, כאשר לכל $(u, v) \notin E$ מתקיים $c(u, v) = 0$
- s קודקוד מקור
- t קודקוד יעד (בור)

אז רשת זרימה מתארת מערכת צינורות וצמתים המחברים בין איזשהו מקור לאישהו יעד. עכשיו אנחנו צריכים דרך לפרט כמה נזרים בכל צינור

<u>הגדרה (זרימה):</u>
זרימה היא פונקציה $f: V \times V \to \mathbb{R}$ המקיימת 3 דרישות:

(1) <u>אילוצי קיבול:</u> לכל $u, v \in V$ מתקיים $f(u,v) \leq c(u,v)$

(2) <u>אנטי-סימטריות:</u> לכל $u, v \in V$ מתקיים $f(u,v) = -f(v,u)$

- אם עוברות *5* יחידות מ- a ל- b, אז בכיוון ההפוך עוברות *(-5)* יחידות

(3) <u>שימור זרימה:</u> לכל $u \in V \setminus \{s,t\}$ מתקיים

$$\sum_{v \in V} f(u,v) = 0$$

- למה זה שימור זרימה? זה אומר שחוץ מהקודקודים s,t, אף קודקוד בגרף לא מייצר ולא בולע חומר. למה זה אומר את זה? כי זרימה שנכנסת ל- u נספור עם מינוס וזרימה שיוצאת מ- u נספור עם פלוס

נסה להבין את אילוץ 3 (שימור זרימה):
אולי בצורה יותר טבעית, היינו רוצים לדרוש שלכל $\boldsymbol{u} \in V \setminus \{s,t\}$ מתקיים

$$\begin{bmatrix}\text{סכום הזרימה החיובית} \\ \text{היוצאת מ } u\end{bmatrix} = \sum_{\substack{v \in V \\ f(\boldsymbol{u},v) > 0}} f(\boldsymbol{u},v) = \sum_{\substack{v \in V \\ f(v,\boldsymbol{u}) > 0}} f(v,\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix}\text{סכום הזרימה החיובית} \\ \text{הנכנסת ל } u\end{bmatrix}$$

בגלל אנטי-סימטריות, זה מתקיים אם ורק אם

$$\sum_{\substack{v \in V \\ f(\boldsymbol{u},v) > 0}} f(\boldsymbol{u},v) = \sum_{\substack{v \in V \\ f(\boldsymbol{u},v) < 0}} f(v,\boldsymbol{u})$$

נעביר אגפים

$$\sum_{\substack{v \in V \\ f(\boldsymbol{u},v) > 0}} f(\boldsymbol{u},v) - \sum_{\substack{v \in V \\ f(\boldsymbol{u},v) < 0}} f(v,\boldsymbol{u}) = 0$$

שוב, בגלל אנטי-סימטריות,

$$\sum_{\substack{v \in V \\ f(\boldsymbol{u},v) > 0}} f(\boldsymbol{u},v) + \sum_{\substack{v \in V \\ f(\boldsymbol{u},v) < 0}} f(\boldsymbol{u},v) = 0$$

כלומר קיבלנו

$$\sum_{v \in V} f(\boldsymbol{u},v) = 0$$

נבדוק את האילוצים האלו על הדוגמה מתחילת השיעור:

- אנטי-סימטריות וקיבול:

$f(s,a)=7\leq 30$
$f(a,s)=-7\leq 0$
$f(s,t)=f(t,s)=0\leq 0$
$f(a,t)=2\leq 2$
$f(t,a)=-2\leq 4$
$f(a,b)=5\leq 5$
$f(b,a)=-5\leq 0$

- נבדוק אילוץ שימור זרימה:

$f(a,s)+f(a,t)+f(a,b)=(-7)+2+5=0$

<u>הערה:</u> מאנטי-סימטריות מתקיים

$$\sum_{v\in V} f(u,v)=-\sum_{v\in V} f(v,u)$$

ולכן $\sum_{v\in V} f(u,v)=0$ אם ורק אם $\sum_{v\in V} f(v,u)=0$

לכן את אילוץ שימור הזרימה ניתן לכתוב גם כך: לכל $u\in V\setminus\{s,t\}$ מתקיים $\sum_{v\in V} f(v,u)=0$

נחזור לדוגמה שלנו. האם יכולה להיות זרימה (ישירה) בין 2 קודקודים שאין ביניהם בכלל צלע?

<u>אבחנה:</u> אם $(u,v)\notin E$ וגם $(v,u)\notin E$ אזי $f(u,v)=f(v,u)=0$

<u>הוכחה:</u>
מצד אחד מתקיים

$$f(u,v)\leq c(u,v)\underbrace{=}_{\text{כי אין צלע}}0$$

ומצד שני גם

$$-f(u,v)=f(v,u)\leq c(v,u)\underbrace{=}_{\text{כי אין צלע}}0$$

ולכן

$$f(u,v)=-f(v,u)=0$$

<u>הערות נוספות:</u>

* זרימה חיובית בכיוון אחד $\Leftrightarrow$ זרימה שלילית בכיוון השני
(אין דבר כזה דרימה חיובית בשני הכיוונים)
* זרימה מוגדרת בין <u>כל</u> 2 קודקודים. אם אין בין 2 קודקודים זרימה (כלומר שווה לאפס) אז לא מציינים זאת בגרף.

מה היינו רוצים למקסם כאשר אנחנו מחפשים זרימה כזאת?

<u>הגדרה (גודל של זרימה):</u>
בהינתן רשת זרימה N עם פונקציית זרימה f, <u>גודל</u> הזרימה מסומן על ידי $|f|$ ומוגדר כ-

$$|f|=\sum_{v\in V} f(s,v)$$

כלומר <u>גודל</u> הזרימה היא כמות הזרימה היוצאת מ- s. בהמשך נראה שמתקיים גם

$$|f| = \sum_{v \in V} f(v,t)$$

כלומר כמות הזרימה היוצאת מ- s שווה לכמות הזרימה הנכנסת ל- t.

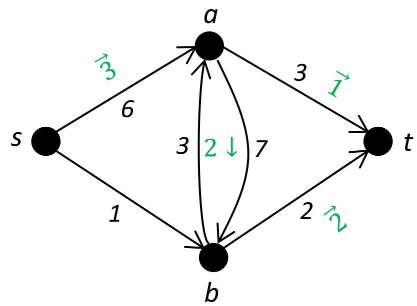
בעית זרימת מקסימום

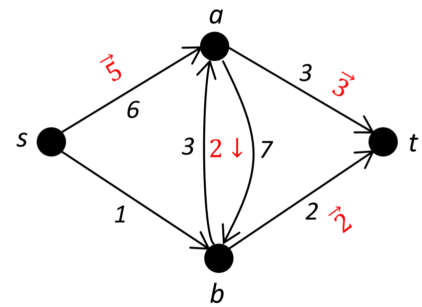
<u>קלט:</u> רשת זרימה $N = (G = (V,E), c, s, t)$

<u>פתרון חוקי:</u> זרימה $f: V \times V \to \mathbb{R}$ (המקיימת את 3 הדרישות!)

<u>יש למצוא:</u> זרימה f שגודלה מקסימלי

דוגמאות: בירוק – דיגמה לזרימה לא מקסימלית. באדום – זגומה לזרימת מקסימום





<u>רעיון כושל למציאת זרימת מקסימום ע"י אלגוריתם חמדן:</u>

הרעיון: נסתכל על הדוגמא הנ"ל. כדי "לתקן" את הזרימה הירוקה ולהפוך אותה למקסימלית, היינו יכולים להסתכל על המסלול *(s,a,t)* ולראות שזהו מסלול מ- s ל- t שלאורך כל קשת במסלול הזה מתקיים שקיבוצת הקשת גדולה ממש מהזרימה. למסלול כזה נקרא "מסלול לא רווי".

<u>הגדרה:</u> בהינתן רשת זרימה $N = (G = (V,E), c, s, t)$ ופונקצית זרימה f, <u>מסלול לא רווי</u> הוא מסלול בגרף $(s = v_0, v_1, \dots, v_\ell = t)$ כך שלכל i מתקיים

$$(v_i, v_{i+1}) \in E$$
$$c(v_i, v_{i+1}) > f(v_i, v_{i+1})$$

עכשיו נציע אלגוריתם חמדן שבכל שלב מוצא מסלול לא רווי ומגדיל את הזרימה בכמה שאפשר להזרים במסלול:

<u>אלגוריתם כושל:</u>

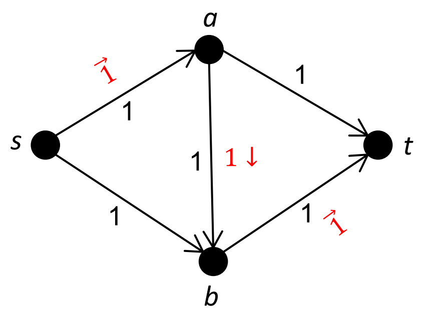
- התחל מזרימה $f(u,v) = 0$ לכל $u, v \in V$
  (כלומר באיתחול מתחילים מהזרימה החוקית הכי פשוטה שיש)
- כל עוד קיים מסלול לא רווי בגרף:
  - מצא מסלול לא רווי P והזרם בו כמה שאפשר. כלומר, לכל $(u,v) \in P$ בצע:

$$f(u,v) \leftarrow f(u,v) + \min_{e \in P}\{c(e) - f(e)\}$$
$$f(v,u) \leftarrow -f(u,v)$$

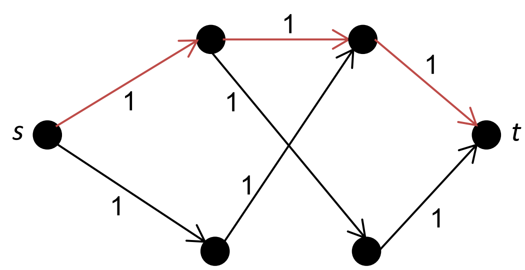
למשל, בדוגמה האחרונה, אולי בהתחלה נבחר מסלול *(s,a,b,t)* ונזרים בו 2 יחידות. אח"כ נבחר מסלול *(s,a,t)* ונזרים בו 3 יחידות.

דוגמה שבה האלגוריתם <u>לא</u> מוצא זרימה מקסימלית:

נניח שהמסלול הראשון שבחרנו הוא *(s,a,b,t)* והעברנו בו יחידה אחת.
עכשיו אין מסלול לא רווי בגרף והאלגוריתם עוצר.



<u>שאלה:</u> אולי תמיד נבחר מסלול <u>קצר</u> ביותר?
<u>תשובה:</u> גם זה לא יעבוד. דוגמה נגדית:



<u>הבעייה:</u> ברגע שבחרנו מסלול אחד אז אנחנו לא מתחרטים (כמו בכל אלגוריתם חמדן...)
מה הכוונה להתחרט? למשל בדוגמה הלפני אחרונה – בקשת האנכית – להגדיל את הזרימה בכיוון הנגדי. איך אפשר לעשות את זה? נשים לב שאותה דוגמה, אם נסתכל על סדרת הקודקודים *(s,b,a,t)* אז אמנם סדרת קודקודים זו <u>לא</u> מהווה מסלול בגרף, אבל עדיין אנחנו יכולים להגדיל את הזרימה ב- 1 לאורך הסדרה הזאת.

המסקנה היא שאנחנו צריכים אלגוריתם שמתחשב גם ב"מסלולים" כאלה.

<u>הגדרה (מסלול שיפור):</u>
בהינתן רשת זרימה N ופונקצית זרימה f, <u>מסלול שיפור</u> הוא <u>סדרה</u> של קודקודים $s = v_0, v_1, \dots, v_\ell = t$ כך שלכל i מתקיים
$$0 < \Delta_i = c(v_i, v_{i+1}) - f(v_i, v_{i+1})$$

<u>הערות:</u>
(1) שימו לב: סדרת הקודקודים הזאת לא בהכרח מהווה <u>מסלול</u> בגרף G.
כלומר יתכן i כך ש- $(v_i, v_{i+1}) \notin E$

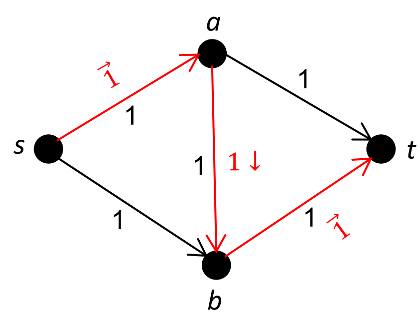
(2) לכל i מתקיים: או $(v_i, v_{i+1}) \in E$ או $(v_{i+1}, v_i) \in E$ או שניהם.
למה? כי אחרת ראינו שמתקיים $c(v_i, v_{i+1}) = f(v_i, v_{i+1}) = 0$ ואז $\Delta_i = 0$

<u>אינטואיציה:</u>

(1) עבור i כך ש- $(v_i, v_{i+1}) \in E$ האינטואיציה ברורה:
$\Delta_i =$ קיבול הצלע מינוס כמה שזורם כרגע

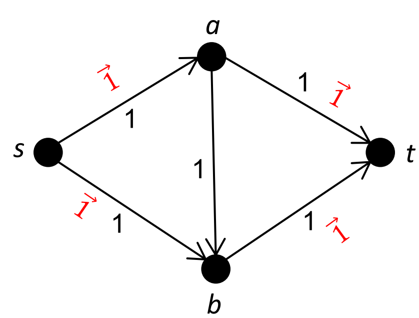
(2) עבור i כך ש- $(v_i, v_{i+1}) \notin E$ מתקיים $c(v_i, v_{i+1}) = 0$ ולכן
$0 < \Delta_i = 0 - f(v_i, v_{i+1}) = f(v_{i+1}, v_i)$
כלומר: כמה אני יכול להזרים בכיוון הזה? כמה שאפשר לבטל מההזרמה בכיוון הנגדי.

<u>דוגמה:</u> אם ברשת הזרימה הבאה בחרנו את המלול האדום והזרמנו בו 1:



כעת נוכל לבחור את מסלול השיפור *(s,b,a,t)* ולהזרים בו 1. נבדוק:

$c(s,b) - f(s,b) = 1 - 0 = 1$
$c(b,a) - f(b,a) = 0 - (-1) = 1$
$c(a,t) - f(a,t) = 1 - 0 = 1$
נקבל:



אלגוריתם Ford-Fulkerson (1954)

- התחל מזרימה חוקית $f(u,v) = 0$ לכל $u, v \in V$.
- כל עוד קיים מסלול שיפור, בצע:
  - * מצא מסלול שיפור $P = (s = v_0, v_1, \dots, v_\ell = t)$
  - * חשב $\Delta = \min_{0 \le i \le \ell-1} \{\Delta_i\} = \min_{0 \le i \le \ell-1} \{c(v_i, v_{i+1}) - f(v_i, v_{i+1})\}$
  - * לכל $0 \le i \le \ell - 1$ בצע:

$f(v_i, v_{i+1}) \leftarrow f(v_i, v_{i+1}) + \Delta$
$f(v_{i+1}, v_i) \leftarrow -f(v_i, v_{i+1})$ $\quad \left(= f(v_{i+1}, v_i) - \Delta \right)$

את הנכונות וניתוח זמן הריצה של האלגוריתם הזה נעשה בפעם הבאה. עכשיו: איך יודעים אם קיים מסלול שיפור? ואיך מוצאים אחד כזה?

<u>הגדרה (רשת זרימה שיורית):</u>
בהינתן רשת זרימה $N=(G=(V,E),c,s,t)$ וזרימה f ברשת N, נגדיר את <u>רשת הזרימה השיורית</u> N_f באופן הבא:

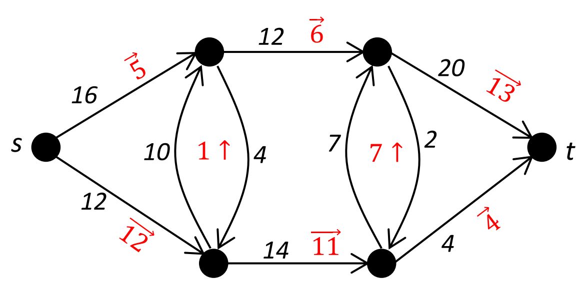
$$N_f=\left(G_f=\left(V,E_f\right),c_f,s,t\right)$$

$$c_f(u,v)=c(v,v)-f(u,v)$$

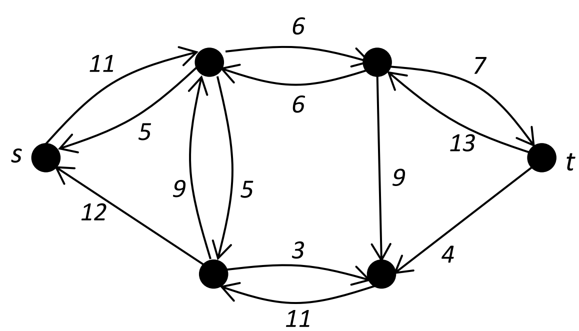
$$E_f=\left\{\,(u,v)\in V\times V\ :\ \ c_f(u,v)>0\,\right\}$$

<u>דוגמה:</u>

בשחור – רשת זרימה N
באדום – זרימה f



רשת הזרימה השיורית כאן היא:



<u>אבחנה:</u> סדרת קודקודים היא <u>מסלול שיפור</u> ב- N יחסית לזרימה f אם ורק אם היא <u>מסלול</u> ב- N_f

<u>הערות:</u>

(1) הרשת השיורית N_f היא בעצמה רשת זרימה

(2) לכל $(u,v)\in V\times V$ מתקיים ש- $c_f(u,v)\geq 0$, אבל E_f מכילה רק זוגות (u,v) עבורם $c_f(u,v)>0$

(3) $\begin{bmatrix}(u,v)\in E_f\\ \text{או}\\ (v,u)\in E_f\end{bmatrix}\Longleftrightarrow\begin{bmatrix}(u,v)\in E\\ \text{או}\\ (v,u)\in E\end{bmatrix}$

לכן $2\leq\frac{|E_f|}{|E|}\leq\frac{1}{2}$

ניסוח שקול של האלגוריתם של F-F

(1) התחל מזרימה $f(u,v)=0$ לכל u,v

(2) בנה את הרשת השיורית N_f

(3) אם אין מסלול מ- s ל- t ב- N_f עצור והחזר את f.
אחרת מצא מסלול פשוט P מ- s ל- t ב- N_f.

(4) הגדר

$$c_f(P)=\min_{(u,v)\in P}\left\{c_f(u,v)\right\} = \min_{(u,v)\in P}\left\{c(u,v)-f(u,v)\right\}$$

(5) הגדר

$$f(u,v)=\begin{cases} f(u,v)+c_f(P) & , \quad (u,v)\in P \\ f(u,v)-c_f(P) & , \quad (v,u)\in P \\ f(u,v) & , \quad \text{else} \end{cases}$$

(6) לך ל- (2)