תכנון אלגוריתמים 16.12.2020

הרצאה 17: תכנון לינארי

Textbook: Cormen, Leiserson, Rivest, Stein. Introduction to Algorithms.

מרצה: אורי שטמר

תזכורת: <u>מערכת משוואות לינאריות</u> היא מערכת של משוואות מהצורה הבאה

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + a_{m3}\cdot x_3 + \cdots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{cases}$$

ניתן לרשום זאת באופן מקוצר כך:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot x_j = b_i \qquad \forall i = 1,2,\dots,m$$

ראיתם בקורס באלגברה שניתן לפתור מערכת משוואות כזאת (כלומר, למצוא הצבה מספקת או לוודא שאין כזו) בצורה יעילה ע"י דירוג מטריצה. בפרק הזה בקורס שלנו אנחנו נסתכל על בעיה דומה (אבל האלגוריתמים שפותרים אותה הם הרבה יותר מסובכים):

תוכנית לינארית מסוג מינימיזציה	**תוכנית לינארית מסוג מקסימיזציה**
$\min \quad \sum_{j=1}^{n} c_j\cdot x_j$ $\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot x_j \ge b_i \quad \forall\, i = 1,\dots,m$ $x_j \ge 0 \quad \forall\, j = 1,\dots,n$	$\max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j\cdot x_j$ $\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot x_j \le b_i \quad \forall\, i = 1,\dots,m$ $x_j \ge 0 \quad \forall\, j = 1,\dots,n$

<u>הגדרה:</u> תוכנית לינארית מוגדרת ע"י אוסף של m אי-שוויונים לינאריים מעל n משתנים ממשיים (אי-השוויונים האלה נקראים "אילוצים") ופונקציית מטרה לינארית. הקלט לתוכנית לנארית הוא אוסף קבועים (מס' רציונלים):

$$\left.\begin{array}{ll} a_{ij} & \forall\, i = 1,\dots,m \quad , \quad j = 1,\dots,n \\ b_i & \forall\, i = 1,\dots,m \end{array}\right\}$$

מגדירים את האילוצים

$$c_j \qquad \forall\, j = 1,\dots,n \longleftarrow$$

מגדירים את פונק' המטרה

בתוכנית לינארית מסוג מקסימיזציה:
פתרון חוקי הוא השמה של ערכים ממשיים למשתנים $x_1, x_2, \dots, x_n$ כך שמתקיימים האילוצים

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i \qquad \forall\ i = 1, \dots, m$$

$$x_j \ge 0 \qquad\qquad \forall\ j = 1, \dots, n$$

פתרון אופטימלי הוא פתרון חוקי עבורו הפונקציה $\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$ משיגה ערך גדול ביותר

בתוכנית לינארית מסוג מינימיזציה:
פתרון חוקי הוא השמה של ערכים ממשיים למשתנים $x_1, x_2, \dots, x_n$ כך שמתקיימים האילוצים

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \ge b_i \qquad \forall\ i = 1, \dots, m$$

$$x_j \ge 0 \qquad\qquad \forall\ j = 1, \dots, n$$

פתרון אופטימלי הוא פתרון חוקי עבורו הפונקציה $\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$ משיגה ערך קטן ביותר

הערות:
(1) המשתנים $x_1, \dots, x_n$ הם משתנים ממשיים
(2) בתוכניות הלינאריות שנראה תמיד יהיו אילוצי סימן $x_j \ge 0$
(3) בתוכניות מקסימיזציה, כל האילוצים (פרט לאילוצי סימן) יהיו אילוצי $\le$
בתוכניות מינימיזציה, כל האילוצים (כולל אילוצי סימן) יהיו אילוצי $\ge$

הערה נוספת: באופן כללי, אפשר לדבר גם על וריאציות אחרות של תוכניות לינאריות, אבל בקורס שלנו אנחנו נגביל את עצמנו לשני הווריאנטים הנ"ל.

משפט – אלגוריתם האליפסואיד (ללא הוכחה): קיים אלגוריתם פולינומי לפתרון תוכניות לינאריות. כלומר האלגוריתם מקבל כקלט תוכנית לינארית ומחזיר פתרון אופטימלי בזמן פולינומי בגודל הקלט.

זהו לא אלגוריתם פשוט. לא נלמד אותו בקורס שלנו, אלא רק נסתמך על העובדה כי קיים אלגוריתם פולינומי.

דוגמה לבעיה פשוטה שנוכל לפתור בעזרת תכנון לינארי

נניח שמפעל חלב מסויים מייצר ומוכר 2 סוגי מוצרים:
- חלב במחיר של 10 ש"ח לליטר
- שוקו במחיר של 20 ש"ח לליטר

המפעל רוצה למקסם את ההכנסות שלו, אבל יש לו כל מני אילוצים טכניים:
- אין אפשרות לייצר יותר מ- 3 ליטר שוקו בשעה
- ליטר חלב מכיל 20 גרם סוכר, ליטר שוקו מכיל 30 גרם סוכר, ואין אפשרות לעבד יותר מ- 100 גרם סוכר בשעה.

כמה ליטרים של חלב ושל שוקו כדאי למפעל לייצר (בשעה) כדי למקסם את ההכנסות שלהם? (אנחנו מניחים שכל מה שהם מייצרים הם מוכרים..)

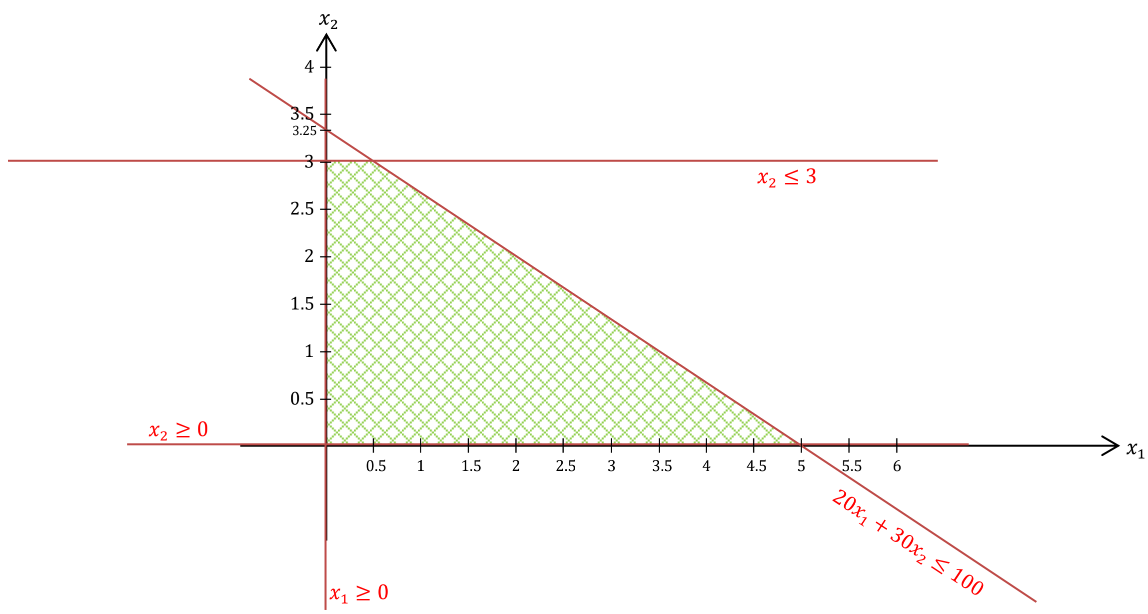
<u>נסמן:</u> $x_1 =$ כמות חלב שמייצרים בשעה
$x_2 =$ כמות שוקו שמייצרים בשעה

נוכל למקסם את ההכנסות של המפעל ע"י פתרון התוכנית הלינארית הבאה:

$$\begin{aligned} \max \quad & 10x_1 + 20x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_2 \leq 3 \\ & 20x_1 + 30x_2 \leq 100 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

מכיוון שאנחנו יודעים שקיים אלגוריתם פולינומי לפתרון תוכניות לינאריות, נוכל להשתמש בו כדי למצוא פתרון אופטימלי לתוכנית הנ"ל (כלומר כדי למצוא השמה למשתנים x_1, x_2). אבל בדוגמה הזאת, מכיוון שהיא כל כך פשוטה, נוכל לפתור את התוכנית הלינארית הזאת בעצמנו "על הנייר".

נצייר את האילוצים של התוכנית הנ"ל (באדום):



האיזור הירוק נקרא "התחום הפיזבילי" והוא מכיל בדיוק את כל הפתרונות החוקיים לתוכני הלינארית שלנו.
פתרון אופטימלי (יחיד) מתקבל בנקודה $x_1 = 0.5 \quad x_2 = 3$
פתרון כזה נותן למפעל שלנו הכנסות (לשעה) בסך $10 \cdot 0.5 + 20 \cdot 3 = 65$

<u>שאלה:</u> איך יודעים שהאופטימום בדוגמה מתקבל ב- $\left(\frac{1}{2},3\right)$ ושהוא יחיד?

נניח שאנחנו נמצאים בתוך התחום הפיזבילי. מכיוון שפונק' המטרה היא $10x_1+20x_2$ אז תמיד ע"י הגדלת x_1 או x_2 אנחנו מגדילים את פונק' המטרה.
זה נכון גם כשאנחנו על הקו $x_2=3$ (נוכל לשפר את המצב ע"י הגדלת x_1)

$\Leftarrow$ כבר אנחנו מבינים שהפתרון האופטימלי ימצא איפשהו על הקו $20x_1+30x_2=100$. איפה בדיוק?

נניח שאנחנו נמצאים על הקו $20x_1+30x_2=100$, כלומר $x_1=\frac{100-30x_2}{20}$. נציב זאת בפונק' המטרה ונקבל:

$$\text{פונק' המטרה}=10x_1+20x_2=50+5x_2$$

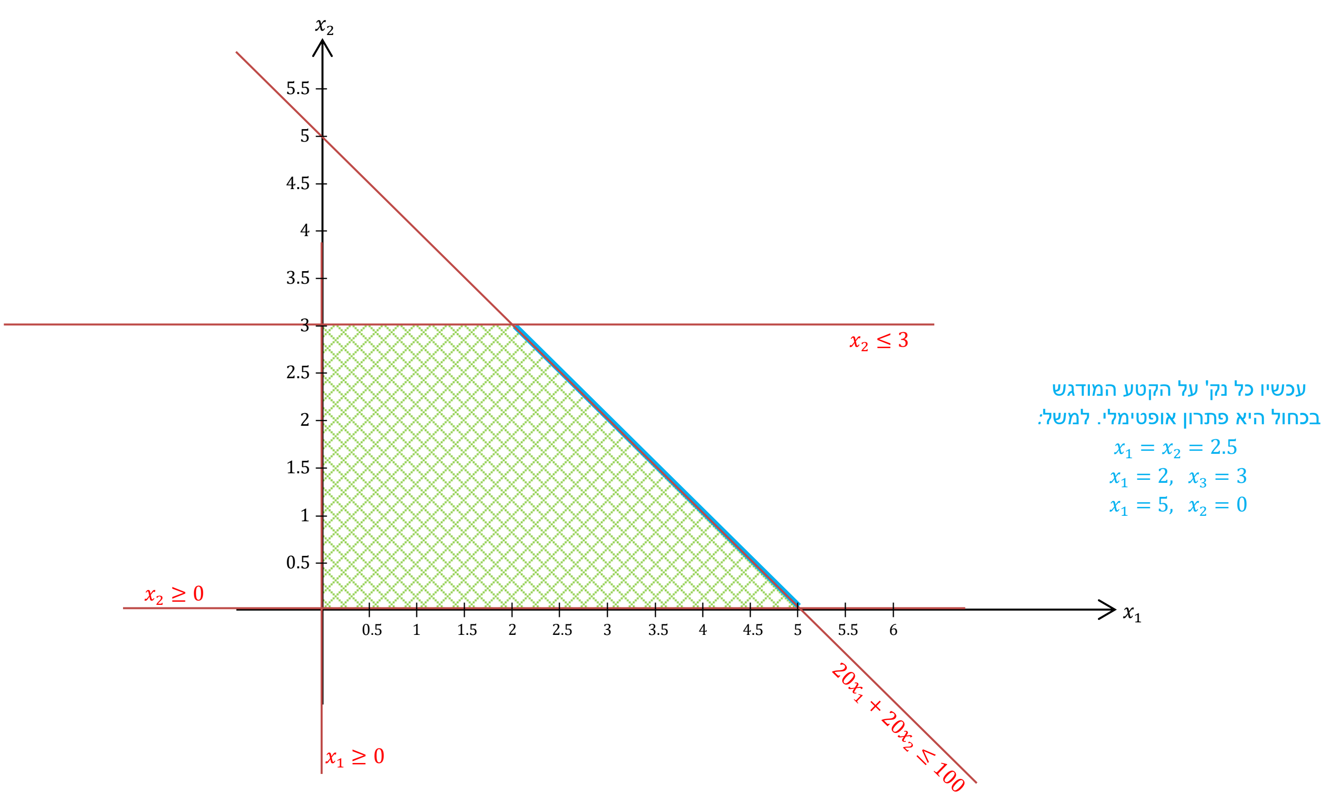
כלומר, אם אנחנו על הקו $20x_1+30x_2=100$ אז פונק' המטרה גדלה עם x_2.

$\Leftarrow$ הפתרון האופטימלי (היחיד) ימצא בנקודה $\left(\frac{1}{2},3\right)$.

<u>מסקנה מהדוגמה האחרונה:</u> גם כאשר כל נתוני הבעיה הם בשלמים, פתרון אופטימלי עשויי להכיל ערכים שבריים.

<u>דוגמה נוספת:</u>
נניח עתה שבמפעל מורידים את כמות הסוכר בשוקו ל- 20 גרם לליטר ומוכרים אותו באותו מחיר של חלב (כלומר ב- 10 ש"ח לליטר). עכשיו הבעייה שלנו תתואר כך:

$$\begin{array}{ll} \max & 10x_1+20x_2 \\ \text{s.t.} & x_2\le 3 \\ & 20x_1+20x_2\le 100 \\ & x_1,x_2\ge 0 \end{array}$$



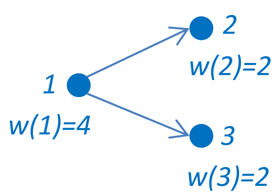
בעית כיסוי בצמתים במשקל מינימום בגרף דו-צדדי

<u>מופע:</u> גרף דו-צדדי $G=(U,V,E)$ ופונק' משקל על הצמתים $w:(U\cup V)\rightarrow\mathbb{R}^{+}$

<u>פתרון חוקי:</u> כיסוי בצמתים. כלומר, קבוצת צמתים $S\subseteq(U\cup V)$ כך שלכל קשת $(u,v)\in E$ מתקיים $u\in S$ או $v\in S$ (או שניהם).

<u>יש למצוא:</u> כיסוי בצמתים S במשקל $w(S)=\sum_{u\in S}w(u)$ קטן ביותר

<u>דוגמה:</u>



$G=(U,V,E)$
$U=\{1\},\ \ V=\{2,3\}$
$E=\{(1,2),\ \ (1,3)\}$

כאן גם $S=\{1\}$ וגם $S=\{2,3\}$ הם כיסויים במשקל מינימום (משקל 4...)

לפני שנבין איך אפשר לפתור את הבעיה הזאת בעזרת תוכנית לינארית, נניח שיש לנו משתני <u>אינדיקטור</u> x_1,x_2,x_3 כאשר $x_i=1$ אם קודקוד i שייך לכיסוי ו- $x_i=0$ אחרת.

בפועל בתוכנית לינארית אין לנו כאלה משתנים, כי המשתנים שלנו רציפים, אבל נדמיין כרגע שכן יש לנו משתנים כאלה.

בעזרת משתני אינדיקטור כאלה, ניתן לתאר את משקל הכיסויי (בדוגמה האחרונה) כ-
$$4x_1+2x_2+2x_3$$

- איך נאלץ את הקשת $(1,2)$ להיות מכוסה?
  נרצה שלפחות אחד מבין x_1,x_2 יקבל ערך 1:
$$x_1+x_2\geq 1$$
- באותו אופן עבור הקשת $(1,3)$:
$$x_1+x_3\geq 1$$

כלומר, ניתן להציג את הבעיה מהדוגמה שלנו באופן הבא:

$$\begin{aligned}\min\quad & 4x_1+2x_2+2x_3\\ s.t.\quad & x_1+x_2\geq 1\\ & x_1+x_3\geq 1\\ & x_1,x_2,x_3\in\{0,1\}\end{aligned}$$

נשים לב שזוהי <u>לא</u> תוכנית לינארית בגלל האילוץ האחרון.

עוד נשים לב שאילוץ $x_1\in\{0,1\}$ ניתן לרשום באופן שקול ע"י
$$x_1\geq 0\quad,\quad x_1\leq 1\quad,\quad x_1\in\mathbb{Z}$$

נרשום זאת באופן הבא (כי בבעיית מינימיזציה מותר רק אילוצים מסוג $\geq$):
$$x_1\geq 0\quad,\quad -x_1\geq -1\quad,\quad x_1\in\mathbb{Z}$$

כלומר, אנחנו יכולים להציג את הבעייה מהדוגמה שלנו באופן הבא:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\
s.t. \quad & x_1 + x_2 \geq 1 \\
& x_1 + x_3 \geq 1 \\
& -x_1,\ \ -x_2,\ \ -x_3 \geq -1 \\
& x_1,\ \ x_2,\ \ x_3 \geq 0 \\
& x_1,\ \ x_2,\ \ x_3 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

שימו לב: זאת עדיין לא תוכנית לינארית! תוכנית כזאת נקראת "תוכנית בשלמים".

אז כמו שעשינו עבור הדוגמה הזאת, באופן כללי נוכל להציג את הבעייה שלנו כתוכנית מתמטית עם משתנים שלמים באופן הבא:

תוכנית *A*			
$\min$	$\sum_{u \in (U \cup V)} w(u) \cdot x_u$		(1)
$s.t.$	$x_u + x_v \geq 1$	$\forall\ (u,v) \in E$	(2)
	$x_u \geq 0$	$\forall\ u \in (U \cup V)$	(3)
	$-x_u \geq -1$	$\forall\ u \in (U \cup V)$	(4)
	$x_u \in \mathbb{Z}$	$\forall\ u \in (U \cup V)$	(5)

שימו לב: כמו שאמרנו – זאת לא תוכנית לינארית בגלל אילוץ (5)

איך התוכנית הזאת קשורה לבעיית הכיסוי בצמתים שלנו?

אבחנה 1: וקטור $\hat{x} = (\hat{x}_u)_{u \in U \cup V}$ מקיים את אילוצים $(5) - (3)$ אם"ם הוא וקטור מעל $\{0,1\}$

אבחנה 2: לכל וקטור $\hat{x} = (\hat{x}_u)_{u \in U \cup V}$ מעל $\{0,1\}$, פונקציית המטרה (1) מבטאת את משקל קבוצת הצמתים המאופיינת ע"י הוקטור, כלומר את משקל הקבוצה $S(\hat{x}) = \{u \in U \cup V\ \ :\ \ \hat{x}_u = 1\}$

טענה: וקטור $\hat{x} = (\hat{x}_u)_{u \in U \cup V}$ מעל $\{0,1\}$ מקיים את אילוץ (2) אם"ם הקבוצה המאופיינת $S(\vec{x})$ היא כיסוי בצמתים חוקי ב- G

הוכחת הטענה:
הקבוצה $S(\hat{x})$ היא כיסוי בצמתים אם"ם לכל קשת $(u,v) \in E$ מתקיים שלפחות אחד מבין u, v שייך ל- $S(\hat{x})$.
זה נכון אם"ם לפחות אחד מבין האינדיקטורים $\hat{x}_u, \hat{x}_v$ שווה ל- 1. מכיוון ששני המשתנים אי-שליליים, זה שקול לאילוץ (2).
מ.ש.ל.

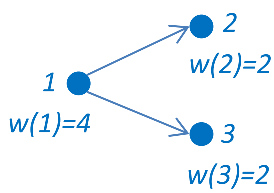
נסמן ב- OPT את ערך פתרון אופטימלי של תוכנית *A*. אז OPT הוא משקל כיסוי מינימלי בגרף G.

כמו שאמרנו, תוכנית A היא לא תוכנית לינארית בגלל אילוץ (5). נסתכל על התוכנית הלינארית המתקבלת מהסרת אילוץ (5):

תוכנית *B*		
$\min \sum_{u \in (U \cup V)} w(u) \cdot z_u$		(6)
$s.t. \quad z_u + z_v \geq 1$	$\forall\, (u, v) \in E$	(7)
$z_u \geq 0$	$\forall\, u \in (U \cup V)$	(8)
$-z_u \geq -1$	$\forall\, u \in (U \cup V)$	(9)

<u>הערות:</u>

- תוכנית *B* היא תוכנית לינארית
- התוכנית לא מייצגת את בעיית הכיסוי בצמתים שלנו כי היא מאפשרת גם ערכים שיבריים למשתנים z_u



למשל, בדוגמה הקודמת שלנו

$$z_1 = z_2 = z_3 = \frac{1}{2}$$

מקיים את כל האילוצים
ומביא למינימום את פונק' המטרה...

נסמן ב- $FRAC$ את <u>ערך</u> פתרון אופטימלי של תוכנית *B*

מה יכול להיות היחס בין $FRAC$ ל- OPT ?
די ברור שתמיד $FRAC \leq OPT$ כי כל פתרון חוקי לתוכנית *A* הוא גם פתרון חוקי לתוכנית *B* (כי רק מחקנו אילוצים) ולכן בפרט פתרון אופטימלי לתוכנית *A* הוא פתרון חוקי לתוכנית *B*. אבל אולי יכול להיות שלתוכנית *B* קיים פתרון אחר שמשיג ערך נמוך יותר?

<u>משפט:</u> לכל מופע $G = (U, V, E), w$ לבעיית כיסוי בצמתים במשקל מינימום בגרף דו-צדדי מתקיים כי
$OPT = FRAC$

<u>מסקנה:</u> ניתן לחשב את OPT בזמן פולינומי

בשיעור הבא נוכיח את המשפט הנ"ל ובנוסף נראה איך ניתן למצוא כיסויי במשקל OPT (כלומר איך ניתן למצוא פתרון אופטימלי, ולא רק לדעת מהו המשקל של פתרון אופטימלי...)